

O Problema da Espera do Trem

Dois professores de processos estocásticos chegam à plataforma de uma estação ferroviária e observam o número de passageiros que lá estão esperando o próximo trem. Como sabem que a espera é longa, eles se ocupam tentando inferir quanto tempo eles terão que esperar, a partir do número de passageiros encontrados em espera.

Eles sabem que os trens param na plataforma observando intervalos fixos entre chegadas, e eles assumem como razoável que a cada parada do trem a plataforma é completamente esvaziada. Adicionalmente, é preciso considerar um processo de chegada de passageiros à plataforma, e vamos assumir que estas chegadas formam um processo Poisson.

Desejamos calcular o tempo médio de espera, considerando:

1. a observação do número de passageiros (n) na plataforma no instante da chegada dos dois professores;
2. o intervalo fixo entre paradas sucessivas de dois trens (T),
3. a chegada de passageiros forma um processo de Poisson com taxa λ , isto é, se t é um instante qualquer no intervalo $[0, T]$, e N_t é o número de passageiros na plataforma decorridos t minutos da última partida, então

$$P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Dicas

Deseja-se calcular $E[T - T_c | N_{T_c} = n]$ onde T_c é o instante de chegada contado a partir da passagem do último trem (portanto o tempo de espera é $T_e = T - T_c$).

Para o cálculo do tempo de espera médio condicional, devemos calcular a densidade condicional $p_{T_c}(t | N_t = n)$, que pode ser obtida através do seguinte limite:

$$p_{T_c}(t | N_t = n) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T_c < t + \Delta t | N_{T_c} = n)}{\Delta t}$$

Note além disso que utilizando a formula de Bayes, podemos expressar

$$P(t \leq T_c < t + \Delta t | N_{T_c} = n) = \frac{P(N_{T_c} = n | t \leq T_c < t + \Delta t) P(t \leq T_c < t + \Delta t)}{\int_0^T P(N_{T_c} = n | T_c = t) dP(T_c = t)}$$

Note que como o tempo de chegada dos professores T_c ocorre de forma independente da passagem dos trens, então $P(t \leq T_c < t + \Delta t) = \Delta t / T$ e $dP(T_c = t) = dt / T$ pois $T_c \sim U[0, T]$.

Finalmente, mostre que

$$\frac{E[T_c | N_{T_c} = n]}{T} = \frac{1}{x} \frac{I_{n+1}}{I_n}$$

onde I_n é uma integral que pode ser expressa recursivamente, com $I_0 = 1 - e^{-x}$ e $x = \lambda T$. Note que para a distribuição Poisson $E[N_t] = \lambda t$, portanto x é o número médio de passageiros que embarcam na estação.

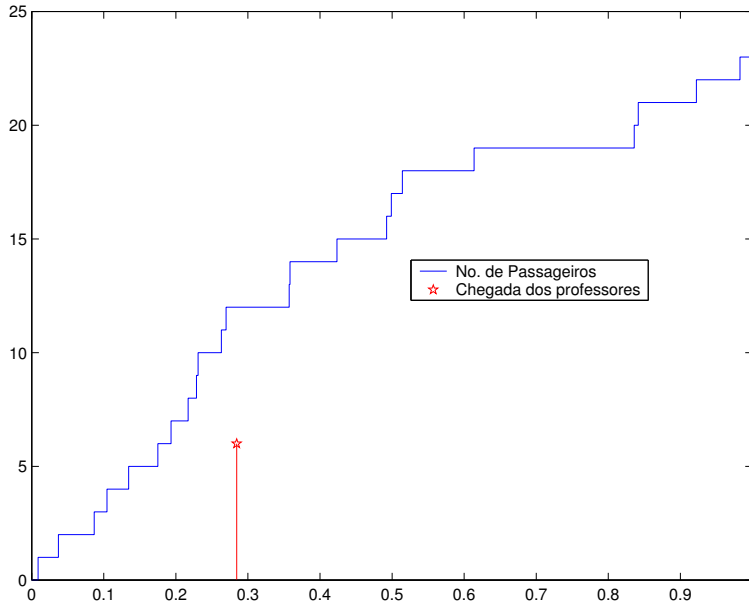


Figura 1: Uma realização na estação de Kuala Lumpur.