UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E ENERGIA

IA–856 Exercícios
Controle Linear Quadrático

1. Considere o funcional de custo:

$$J_2(\mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{1} (dx_k + fu_k)^2 + qx_2^2, \quad \text{e } \mathbf{u} = \{u_0, u_1\},$$

$$x_{k+1} = \alpha x_k + \beta u_k, \quad \text{com } x_0 \text{ conhecido} .$$

   (a) Determine a sequência de controle $\mathbf{u}^* = \{u_0^*, u_1^*\}$ ótimo de tal forma que

$$J_2(\mathbf{u}^*) \leq J_2(\mathbf{u}) \quad \text{para todo } \mathbf{u} = \{u_0, u_1\}.$$

   (b) Para este problema resolva a equação de Bellman (em (6.1.4) do livro de Davis & Vinter) tomando $V_2(x) = qx^2$ e calculando $V_1(x)$ e $V_0(x)$. Utiliza o Teorema de Verificação e teste se o controle calculado na parte (a) é de fato ótimo.

2. Construa uma tabela com a correspondência entre as equações duais de Riccati do filtro de Kalman, escrita para a covariância $P_{k+1|k}$, e a obtida para o controle linear quadrático, escrita para a matrix $S(k)$ que define o custo ótimo $V_k(x) = x'S(k)x$. Identifique as matrizes da equação dinâmica e da equação de observação no caso do filtro, e da equação dinâmica e do custo, no caso do controle.

3. Verifique se a solução do controle ótimo LQG com observação completa dos estados coincide com o controle ótimo para o controle LQ livre de ruído (ou determinístico) tomando-se como custo ótimo a função $W_k(x) = x'S(k)x + \alpha_k$ em um certo instante $0 \leq k < N$.

4. (Exercício Computacional) Considere o mesmo sistema proposto por você para a identificação não-paramétrica, com função de transferência discreta $Y(z)/U(z) = G_u(z)$. Considere duas possibilidades para a função de transferência entre o ruído e a saída Y, $Y(z)/E(z) = G_e(z)$:
   I) $G_e(z) = \sigma_e$, isto é, a representação completa é $Y(z) = G_u(z)U(z) + \sigma_e E(z)$,
   II) $G_e(z) = \sigma_e G_u(z)$, isto é, $Y(z) = G_u(z)(U(z) + \sigma_e E(z))$
   em que $e_k, k \geq 0$ forma uma sequência de ruído branco gaussiano padrão.

   (a) Adote uma representação de estados para este sistema considerando: y – saída; u – entrada de controle; e – ruído a ser considerado como nos casos I) ou II) acima, com variância $\sigma_e^2 = 0{,}04$.

   (b) Adote um custo por estágio na forma $\|y_k + f\,u_k\|^2$ com $f = 1$. Para a solução de horizonte infinito, verifique antes as condições para a existência e unicidade das equações algébricas de Riccati do controle.

   (c) (observação completa de estados) Obtenha as soluções de controle e o custo ótimo para os problemas LQ determinístico ($e_k = 0, \forall k \geq 0$) e LQG com os ruídos nos casos I) e II) acima nas seguintes situações:

      i. Horizonte $N = 3$ adotando-se $Q = I$;
      ii. Horizonte infinito para o LQ;

iii. Horizonte infinito e custo descontado para o LQG (adote $\rho = 0{,}9$);

iv. Horizonte infinito e custo médio por unidade de tempo para o LQG.

Dica – Para resolver a equação algébrica de Riccati utilize a rotina `dare` do Matlab.

(d) Examine o impacto em algumas das soluções de controle ao se escolher $f = 0{,}001$ e $f = 1000$ no custo por estágio.

(e) (observação parcial de estados) Supondo agora que só a saída y_k a cada instante k seja disponível para o controle, resolva o problema de controle ótimo neste cenário, detalhando-o completamente.