

UMA INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

João B. R. do Val

Depto. de Telemática – FEEC – UNICAMP

3 de dezembro de 2011

[FullScreen](#) [Next](#)

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

ESTRUTURANDO RESULTADOS DE EXPERIMENTOS

- $\Omega = \text{ESPAÇO AMOSTRAL} \rightarrow$ Conjunto de todos os possíveis resultados
Ex: $\Omega = \{\text{cara, coroa}\}; \quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \quad \Omega = \{x \in \mathfrak{R}; 0 \leq x \leq 1\}$
- EVENTOS: Qualquer subconjunto de Ω pertencente a uma classe de conjuntos.

Alguns subconjuntos importantes:

ω é um evento elementar $\leftrightarrow$ é um ponto genérico de Ω

$\Omega =$ evento certo; $\emptyset =$ evento impossível

Associamos: resultados de experimentos $\leftrightarrow$ eventos $\leftrightarrow$ conjuntos
sentido de abstração crescente $\longrightarrow$

[Back](#)

[Next](#)

ESTRUTURANDO RESULTADOS DE EXPERIMENTOS

Seja A = conjunto de resultados x
 B = conjunto de resultados y

Resultado de Experimentos	Eventos	Conjuntos
“Ocorre x ou y ”	$\leftrightarrow A \text{ ou } B$	$\leftrightarrow A \cup B$
“Ocorre x e y ”	$\leftrightarrow A \text{ e } B$	$\leftrightarrow A \cap B$
“Não ocorre x ”	$\leftrightarrow \text{n\~ao } A$	$\leftrightarrow \overline{A} \text{ ou } A^c$
“ x e y mutuamente exclusivos	$\leftrightarrow \text{ou } A \text{ ou } B$	$\leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

ESTRUTURANDO A COLEÇÃO DE CONJUNTOS

- Subconjuntos formam um CAMPO DE BOREL.
 $\mathcal{F}$ = campo de Borel $\rightarrow$ Um campo não vazio $\mathcal{F}$ satisfazendo
 - (i) Se $A \in \mathcal{F}$ então $A^c \in \mathcal{F}$
 - (ii) Se $A, B \in \mathcal{F}$ então $A \cup B \in \mathcal{F}$
 - (iii) $\Omega \in \mathcal{F}$

Propriedades de um campo (ou álgebra ou anel) de Borel:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- Se A e $B \in \mathcal{F}$ então $A \cap B \in \mathcal{F}$ e $A - B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$

EXTENSÃO DA ÁLGEBRA

- Extensão: σ -ÁLGEBRA DE BOREL
 - (i) Se $A_i \in \mathcal{F}$ então $A_i^c \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots$
 - (ii)' Se $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots$ então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
 - (iii) $\Omega \in \mathcal{F}$

Exemplo: Falência do Jogador

[BACK](#)[NEXT](#)

5/73

PROBABILIDADE

- PROBABILIDADE: é qualquer função real definida sobre a classe $\mathcal{F}$ de Borel, $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para $A, B \in \mathcal{F}$:

- (i) $P(A) \geq 0$
- (ii) $P(\Omega) = 1$
- (iii) Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exs: $\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$; par-ímpar; eventos elementares

- Propriedades:
 1. $P(\emptyset) = 0$
 2. $P(A^c) = 1 - P(A)$
 3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 4. Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$

Prova

[BACK](#)[NEXT](#)

6/73

ESPAÇO DE PROBABILIDADE

- Espaço de Probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (ou de experimentos):
 Ω = espaço amostral, $\mathcal{F}$ = classe de eventos, P = função probabilidade

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- Seja B um evento tal que $P(B) > 0$, então para todo evento A

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

“é a probabilidade de A dado que B ocorreu”

$P(\cdot|B)$ é probabilidade ?

Exemplo: Selecionar 3 cartas sem reposição e obter três azes.

[BACK](#)[NEXT](#)

7/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

PROBABILIDADE TOTAL E BAYES

- PROBABILIDADE TOTAL: Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventos mutuamente exclusivos com $P(A_i) > 0$, tal que $B \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ então

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Prova

- REGRA DE BAYES:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

Exemplo: Temos 2 moedas honestas e uma moeda com duas caras.

[BACK](#)[NEXT](#)

8/73

INDEPENDÊNCIA

Dois eventos A e B são INDEPENDENTES se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Três eventos A, B , e C são independentes entre si se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Ex: independência 2 a 2 não implica a independência entre 3 eventos

- Propriedades: Se A e B são independentes então

$$- P(A|B) = P(A)$$

$$- A^c \text{ e } B^c, A \text{ e } B^c, A^c \text{ e } B \text{ são independentes}$$

[BACK](#)[NEXT](#)

9/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

PROBABILIDADE CONJUNTA

Os elementos do espaço amostral Ω podem apresentar atributos que permitem a definição de diferentes classes de Borel:

$$- A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_1$$

$$- B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}_2$$

Ex: Joaquim, Pedro, Maria $\rightarrow \Omega =$ atributos: idade, altura

$$A_1 = 5 \text{ anos}$$

$$B_1 = 1.80 \text{ m}$$

Ω é um conjunto de pares ordenados

- Probabilidade conjunta:

$$P(A, B) = P(A \cap B) = \text{ocorrência de } A \text{ e de } B$$

[BACK](#)[NEXT](#)

10/73

PROBABILIDADE CONJUNTA

- Probabilidade marginal:

Para $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ e $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m = \Omega$

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^n P(A_i, B_j) = P(\Omega, B_j)$$

$$P(A_i) = \sum_{j=1}^m P(A_i, B_j) = P(A_i, \Omega)$$

e

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(A_i, B_j) = 1$$

[BACK](#)
[NEXT](#)

11/73

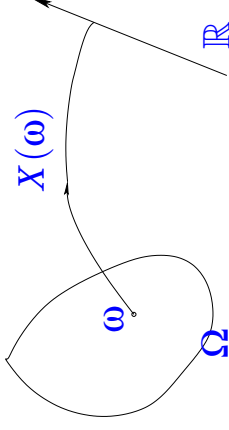
INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

VARIÁVEL ALEATÓRIA

É qualquer função definida no espaço amostral Ω , $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in (-\infty, x]\} \in \mathcal{F}$$

isto é, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é função MENSURÁVEL



- se Ω é enumerável então a variável aleatória é DISCRETA, caso contrário é CONTÍNUA.

Conjunto Enumerável $\rightarrow$ conjunto finito ou infinito, com uma correspondência biunívoca com os números inteiros positivos.

[BACK](#)
[NEXT](#)

12/73

FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

$$F_X(x) \triangleq P(\{X(\omega) \leq x\})$$

$\{X(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in (-\infty, x]\} \in \mathcal{F}$, ou seja, é um evento.

Ex: Variável aleatória tempo de espera

• Propriedades:

- ★ $F_X(-\infty) = 0$
- ★ $F_X(+\infty) = 1$
- ★ Se $x_2 > x_1$, então $F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$ (função monotônica não decrescente)

Prova:

[BACK](#)
[NEXT](#)

13/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

$$p_X(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x)$$

definida para $x \rightarrow F_X(x)$ contínua e diferenciável em x

Ex: distribuição uniforme

• Variável aleatória contínua

- ★ $F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(y) dy$ uma vez que $F_X(-\infty) = 0$
- ★ $p_X(x) \geq 0$ pois $F_X(x)$ é monótona não decrescente

[BACK](#)
[NEXT](#)

14/73

FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE: CASO V.A. DISCRETA

Utiliza-se a função Impulso de Dirac $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad \forall f(t) \text{ contínua em } t_0.$$

Propriedades:

$$\star \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\star \int_{-\infty}^t \delta(s) ds = u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (\text{função degrau } u(t))$$

$$\text{“} \frac{d}{dt} u(t) \triangleq \delta(t) \text{”}$$

[BACK](#)[NEXT](#)

15/73

FUNÇÕES DISTRIBUIÇÃO E DENSIDADE PARA V.A. DISCRETA

$$p_X(x) = \sum_{i=1}^n P\{X = x_i\} \cdot \delta(x - x_i)$$

desta forma,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(y) dy = \sum_{i=1}^n P\{X = x_i\} \cdot \int_{-\infty}^x \delta(y - x_i) dy$$

e a relação entre p_X e F_X vale como no caso contínuo

- v. a. mista (contínua/discreta)

[BACK](#)[NEXT](#)

16/73

ALGUMAS PROPRIEDADES DE F_X E p_X

$$P\{X > x\} = 1 - F_X(x) = \int_x^{+\infty} p_X(y) dy$$

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p_X(y) dy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(y) dy = 1 = F_X(+\infty) - F_X(-\infty)$$

$$p_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

[BACK](#)[NEXT](#)

17/73

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS GAUSSIANAS

$Z \sim N(0, 1) \rightarrow$ é v.a. normal 0-1

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

$$P\{|Z| < 1\} = 0,68$$

$$\text{Erf}(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = P\{Z \leq x\}$$

OUTRAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS IMPORTANTES

- v.a.'s contínuas:
Exponencial, Gama, Cauchy
- v.a.'s discretas:
Binomial, Geométrica, Poisson

[BACK](#)[NEXT](#)

18/73

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS

Ou, estudo de distribuições conjuntas

$$F_{XY}(x, y) \triangleq P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

com $\{X \leq x, Y \leq y\} = \{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\} = \{\omega \in \Omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in D\}$,
onde $D = (-\infty, x] \times (-\infty, y]$

$$p_{XY}(x, y) \triangleq \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

★ Propriedades:

- $F_{XY}(-\infty, y) = 0$
- $F_{XY}(x, -\infty) = 0$
- $F_{XY}(+\infty, +\infty) = 1$

Prova:

[BACK](#)
[NEXT](#)

19/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS

★ Distribuição Marginal:

$$F_{XY}(+\infty, y) = F_Y(y)$$

$$F_{XY}(x, +\infty) = F_X(x)$$

pois $\{X \leq \infty, Y \leq y\} = \{Y \leq y\}$

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x p_{XY}(x, y) dx dy$$

★ Mais Propriedades:

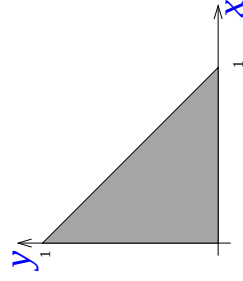
$$\diamond p_X(x) = \frac{d}{dx} F_{XY}(x, +\infty) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(z, y) dy dz$$

$$\diamond p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, y) dy$$

[BACK](#)
[NEXT](#)

20/73

Ex: Distribuição conjunta de X e Y é uniforme no triângulo:



VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS INDEPENDENTES

$$F_{XY}(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\} \cdot P\{Y \leq y\}$$

Assim,

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

[BACK](#)
[NEXT](#)

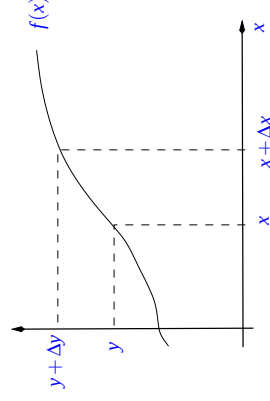
21/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

FUNÇÃO DE VARIÁVEL ALEATÓRIA

- $Y = f(X)$ e X v.a. conhecida.

– Suponha $f(x)$ monotônica crescente (biunívoca), e $F_Y(y) = F_X[f^{-1}(y)]$



e como $p_X(x) \Delta x \approx p_Y(y) \Delta y$,

$$p_Y(y) = \left. \frac{p_X(x)}{df(x)} \frac{dx}{dy} \right|_{x=f^{-1}(y)} \quad \text{pois} \quad \frac{df(x)}{dx} > 0$$

[BACK](#)
[NEXT](#)

22/73

FUNÇÃO DE VARIÁVEL ALEATÓRIA

– Suponha agora $\frac{df(x)}{dx} < 0$ (monotônica decrescente)

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x)}{\left| \frac{df(x)}{dx} \right|} \Bigg|_{x=f^{-1}(y)}$$

– Portanto, no caso geral de função biunívoca:

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x)}{\left| \frac{df(x)}{dx} \right|} \Bigg|_{x=f^{-1}(y)}$$

[BACK](#)[NEXT](#)

23/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

FUNÇÃO DE VARIÁVEL ALEATÓRIA

Ex: Seja X uma v.a. com distribuição uniforme entre 0 e 1 e seja $Y \triangleq \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{1}{X}$ com $\lambda > 0$. Como determinar p_Y e F_Y ?

✓ Generalizando o exemplo: como gerar uma v.a. X com distribuição qualquer conhecida, a partir de uma v.a Y uniforme?

Tomo $Y \sim U[0, 1]$ e X com função de distribuição F_X . Temos que

$$p_Y(y) = 1 = \frac{p_X(x)}{\left| \frac{df(x)}{dx} \right|} \Bigg|_{x=f^{-1}(y)} \quad \text{válida no intervalo } 0 \leq y \leq 1$$

portanto,

$$p_X(x) = \left| \frac{df(x)}{dx} \right|$$

e podemos tomar $f(x) = F_X(x)$ para satisfazer a identidade acima.

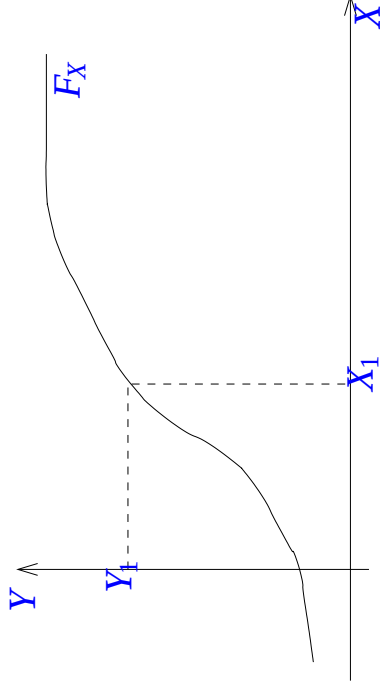
[BACK](#)[NEXT](#)

24/73

FUNÇÃO DE VARIÁVEL ALEATÓRIA

Como resultado tem-se o procedimento:

1. Sorteio a variável $Y(\omega) \sim U[0, 1]$
2. Obte-se $X(\omega)$ de acordo com $X(\omega) = F_X^{-1}(Y(\omega))$.

[BACK](#)[NEXT](#)

25/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

FUNÇÃO DE VARIÁVEL ALEATÓRIA: FUNÇÃO NÃO BIUNÍVOCA

– No caso geral $\rightarrow$ dividimos o domínio em intervalos adequados onde em cada um deles a função seja biunívoca. Como resultado:

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^N p_X(x) \left| \frac{df_i(x)}{dx} \right| \Big|_{x=f_i^{-1}(y)}$$

onde N é o número de regiões R_i , com

$$\bigcup_{i=1}^N R_i = \text{Domínio} \quad \text{e} \quad f_i(x) = f(x), x \in R_i$$

Ex: $X \sim N(0, \sigma^2)$, $Y = X^2$ desejo $p_Y(y)$

[BACK](#)[NEXT](#)

26/73

FUNÇÃO DE MÚLTIPLAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Mesmo problema, agora com duas variáveis

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad p_{UV}(u, v) = ?$$

Supondo uma transformação biunívoca:

$$p_{UV}(u, v) = \left. \frac{p_{XY}(x, y)}{\left| J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) \right|} \right|_{\substack{x=f(u, v) \\ y=g(u, v)}}$$

onde f e g são funções inversas de u e de v , e J é o Jacobiano:

$$J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{bmatrix} = 1 / \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

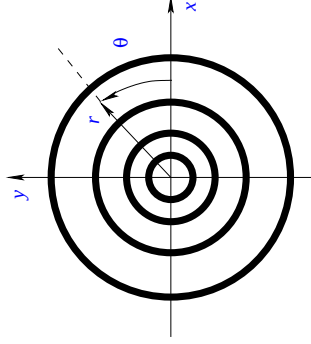
[BACK](#)[NEXT](#)

27/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

FUNÇÃO DE VARIÁVEL ALEATÓRIA

✓ Ex: Jogo de Dardos



$$\left. \begin{aligned} p_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \\ p_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \right\}$$

independentes, desejamos determinar $p_{R,\Theta}(r, \theta)$

[BACK](#)[NEXT](#)

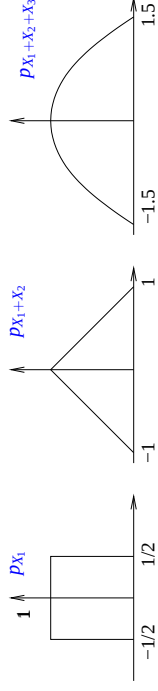
28/73

FUNÇÃO DE VARIÁVEL ALEATÓRIA: SOMA DE V.A.'S INDEPENDENTES

✓ Ex: $Z = X + Y$, X e Y independentes; $p_Z(z)$?

Resultado: $p_Z = p_X * p_Y$

- Generalização importante: soma de n v.a.'s independentes



- Generalização importantíssima: TEOREMA DO LIMITE CENTRAL:

$Z_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / \sqrt{n}$ onde X_i são v.a.'s independentes e identicamente distribuídas

$Z = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ é v.a. GAUSSIANA independente das v.a.'s X_i

[BACK](#)
[NEXT](#)

29/73

MOMENTOS

Esperança matemática ou média ou momento de 1a. ordem

$$\begin{aligned} E[X] &\triangleq \bar{x} = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx < +\infty \end{aligned}$$

Para isso X é necessariamente V.A. INTEGRÁVEL:

$$E[|X|] = - \int_{-\infty}^0 x dF_X(x) + \int_0^{\infty} x dF_X(x) < +\infty$$

Ex: V.A. de Cauchy $p_X(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\pi}$, porém $E[|X|] = \infty$.

[BACK](#)
[NEXT](#)

30/73

MOMENTOS

- Para VARIÁVEIS ALETÓRIAS DISCRETAS:

$$p_X(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\{X = x_k\} \cdot \delta(x - x_k)$$

$$E[X] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\{X = x_k\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \delta(x - x_k) dx$$

então

$$E[X] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \cdot P\{X = x_k\}$$

Ex: Face de um dado

- Se $p_X(x)$ for FUNÇÃO PAR, i.e. $p_X(-x) = p_X(x)$; e $E[X] < +\infty$, então $E[X] = 0$

Ex: gaussiana $N(\mu, \sigma^2)$

[BACK](#)
[NEXT](#)

31/73

MOMENTOS

- MÉDIA DE UMA FUNÇÃO $Y = f(X) \leftrightarrow E[Y]$?

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_X(x) dx < +\infty$$

Ex: X uniforme entre 0 e 1; $Y = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{X}$

- Propriedade: ADITIVIDADE DA MÉDIA

$$\begin{aligned} E[f_1(X) + f_2(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x) + f_2(x)] \cdot p_X(x) dx \\ &= E[f_1(X)] + E[f_2(X)] \end{aligned}$$

[BACK](#)
[NEXT](#)

32/73

MOMENTOS

- MOMENTOS DE ORDEM k

$$m_k \triangleq E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot p_X(x) dx < +\infty$$

$m_1 \rightarrow$ média ($\bar{x}$ ou μ) $m_2 \rightarrow$ segundo momento

- Momentos centrados de ordem k

$$c_k \triangleq E[(X - \mu)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k \cdot p_X(x) dx$$

$c_1 \equiv 0$, $c_2 \rightarrow$ variância (σ^2), $\sigma =$ desvio padrão

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = m_2 - \mu^2$$

– Se $p_X(x)$ for simétrica em torno de μ : $p_X(x - \mu) = p_X(-(x - \mu))$ então $c_k = 0$, $\forall k$ ímpar

[BACK](#)[NEXT](#)

33/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

MOMENTOS

- Ex: Suponha conhecidos apenas μ e σ^2 . Aproxime o valor de $E[X^3]$ em torno de μ .

- Ex: $X \sim$ uniforme $[0, 1]$

- Ex: $X \sim N(0, \sigma^2)$

- Desigualdade de Markov $X \sim$ v.a não negativa ($p_X(x) = 0$, $x < 0$)

$$P\{X \geq \alpha\mu\} \leq \frac{1}{\alpha}$$

- Desigualdade de Tchebycheff

$$P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} ; \varepsilon > 0$$

[BACK](#)[NEXT](#)

34/73

MOMENTOS

- Média para duas variáveis

$$E[f(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) p_{XY}(x, y) dx dy < +\infty$$

- Se X e Y são independentes:

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$$

$$E[f(X) \cdot g(Y)] = E[f(X)] \cdot E[g(Y)]$$

[BACK](#)[NEXT](#)

35/73

CORRELAÇÃO E COVARIÂNCIA

- COVARIÂNCIA: Com $\bar{x} = E[X]$ e $\bar{y} = E[Y]$

$$\text{cov}(X, Y) \triangleq E[(X - \bar{x}) \cdot (Y - \bar{y})]$$

- Noção mais “pobre” do que independência
- variáveis não correlatas ou não correlacionadas $\Leftrightarrow \text{cov}(X, Y) = 0$

$$\text{cov}(X, Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$$

$$-\text{cov}(X, X) = E[(X - \bar{x}) \cdot (X - \bar{x})] = E[(X - \mu)^2] = \sigma_X^2$$

- “Se X e Y são independentes $\Rightarrow$ são não correlatas”
- “Se X e Y são não correlatas, não implica que sejam independentes”
- Exceção: “Se X e Y são gaussianas não correlatas, então são v.a.’s independentes”

[BACK](#)[NEXT](#)

36/73

CORRELAÇÃO E COVARIÂNCIA

- “ Duas variáveis são não correlatas $\Leftrightarrow E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$ ”
- $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2 \operatorname{cov}(X, Y)$
- $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ se X e Y são não correlatas

- CORRELAÇÃO: $R_{XY} \triangleq E[X \cdot Y]$
- COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO ρ_{XY}

$$\rho_{XY} \triangleq \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Com essa definição, $|\rho_{XY}| \leq 1$, obtido da avaliação $E \left[\left(\frac{X - \bar{x}}{\sigma_x} \pm \frac{Y - \bar{y}}{\sigma_y} \right)^2 \right] \geq 0$

Ex: $Y = a \cdot X + b$

[BACK](#)
[NEXT](#)

37/73

FUNÇÃO CARACTERÍSTICA

$$\Phi(u) \triangleq E[\exp(juX)] = \int \exp(jux) \cdot p_X(x) dx$$

$j = \sqrt{-1}$ e u parâmetro real. Note que

$$\Phi(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-jux) \cdot p_X(x) dx$$

é a TRANSFORMADA DE FOURIER de $p_X(x)$

$$P_X(u) = \mathcal{F}[p_X(x)] = \Phi(-u)$$

$P_X(u)$ ou $\Phi(u)$ são igualmente utilizadas.

- Se X e Y são independentes e $Z = X + Y$

$$P_Z(u) = P_{X+Y}(u) = P_X(u) \cdot P_Y(u)$$

$$p_Z(z) = \mathcal{F}^{-1}[P_X(u) \cdot P_Y(u)] = p_X(z) * p_Y(z)$$

[BACK](#)
[NEXT](#)

38/73

FUNÇÃO CARACTERÍSTICA

- $|P_X(u)| \leq 1$, existe para todo $p_X(x)$

- Propriedade: É FUNÇÃO GERADORA DE MOMENTOS

$$P_X(u) = E[\exp(-juX)] \\ = E\left[1 - juX + \frac{(-juX)^2}{2!} + \dots + X^k \frac{(-ju)^k}{k!} + \dots\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} m_k \cdot \frac{(-ju)^k}{k!}$$

$$\text{Portanto } \rightsquigarrow m_k \cdot (-j)^k = \left. \frac{d^k P_X(u)}{du^k} \right|_{u=0}$$

Ex. Para v.a. gaussiana $N(\bar{x}, \sigma^2)$ temos $\Phi_x(u) = \exp(ju\bar{x} - \frac{1}{2}u^2\sigma^2)$. Soma de v.a.'s gaussianas.

- $\rightsquigarrow$ Permite concluir que a combinação de v.a.'s gaussianas independentes é v.a. gaussiana ✓

BACK

NEXT

39/73

DISTRIBUIÇÃO E DENSIDADE CONDICIONAIS

Para $A \in \mathcal{F}$ com $P(A) > 0$,

$$F_X(x|A) \triangleq \frac{P\{X \leq x, A\}}{P(A)} = P\{X \leq x|A\}$$

evento: $\{X \leq x, A\} = \{\omega \in S : X(\omega) \in (-\infty, x]\} \cap \{\omega \in A\}$

$$p_X(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x), \rightsquigarrow p_X(x|A) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x|A)$$

Tomando $A = \{X \geq a\}$:

$$F_X(x|X \geq a) = \frac{P\{X \leq x, X \geq a\}}{P\{X \geq a\}}$$

- para $x < a \Rightarrow F_X(x|X \geq a) = 0$

BACK

NEXT

40/73

DISTRIBUIÇÃO E DENSIDADE CONDICIONAIS

- para $x \geq a$

$$\begin{aligned} F_X(x|X \geq a) &= \frac{P\{a \leq X \leq x\}}{P\{X \geq a\}} = \int_a^x p_X(y) dy \bigg/ \left(1 - \int_{-\infty}^a p_X(y) dy\right) \\ &= \int_a^x p_X(y) dy \bigg/ \int_a^{+\infty} p_X(y) dy \end{aligned}$$

Portanto,

$$p_X(x|X \geq a) = \frac{p_X(x)}{\int_a^{+\infty} p_X(y) dy} \cdot u(x - a)$$

Ex: Distribuição exponencial, $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$. Calcule $F_X(x|X \geq a)$.

[BACK](#)
[NEXT](#)

41/73

DISTRIBUIÇÃO E DENSIDADE CONDICIONAIS

- Condicional sobre um valor

– X V.A. DISCRETA: $F_Y(y|X = a)$ faz sentido pois

$$F_Y(y|X = a) = \frac{P\{Y \leq y, X = a\}}{P\{X = a\}}$$

só pode ser definido nos pontos onde $P\{X = a\} \neq 0$

– X V.A. DISCRETA: Definir pequenos intervalos $[a, a + \Delta a]$, com $\Delta a \rightarrow 0^+$

$$F_X(x|a \leq X \leq a + \Delta a) = u(x - a)$$

$$p_X(x|X = a) = \delta(x - a)$$

[BACK](#)
[NEXT](#)

42/73

DISTRIBUIÇÃO E DENSIDADE CONDICIONAIS

– X V.A. CONTÍNUA: Cálculo de $p_Y(y|x)$ supondo p_X e p_{XY} contínuas

$$F_Y(y|x \leq X \leq x + \Delta x) = \frac{P\{Y \leq y, x \leq X \leq x + \Delta x\}}{P\{x \leq X \leq x + \Delta x\}}$$

com $\Delta x \approx 0$

$$F_Y(y|x \leq X \leq x + \Delta x) \approx \frac{\int\limits_x^{x+\Delta x} p_{XY}(x, \alpha) d\alpha}{p_X(x)} \quad \text{e então} \quad p_Y(y|x) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x)}$$

ESPERANÇA CONDICIONAL

$$E[X|A] \triangleq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_X(x|A) dx \quad \text{para} \quad A \in \mathcal{F} \text{ e } P(A) > 0.$$

$$E[X|X \geq a] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_X(x|X \geq a) dx = \frac{\int\limits_a^{+\infty} x \cdot p_X(x) dx}{\int\limits_a^{+\infty} p_X(x) dx}$$

ESPERANÇA CONDICIONAL

- Caso Discreto:

$$E[X|Y=y] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i P(X=x_i|Y=y)$$

- Esperança Condicional como Variável Aleatória

$$E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y p(y|x) dy \Rightarrow \text{é uma função } x \rightarrow f(x)$$

assim $E[Y|X] = f(X(\omega))$ é v.a.

[BACK](#)
[NEXT](#)

45/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

ESPERANÇA CONDICIONAL

- Propriedades:

$$\diamond E[E[Y|X]] = E[Y] \quad (\text{LEI DAS ESPERANÇAS ITERADAS})$$

Obtida das expressões

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} E[Y|X=x] p_X(x) dx \quad (\text{caso contínuo})$$

$$E[Y] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} E[Y|X=x_i] P(X=x_i) \quad (\text{caso discreto})$$

$\diamond$ Se $g(x)$ é função determinística

$$E[Yg(X)|X=x] = g(x)E[Y|X=x]$$

$\diamond$ Se $z = g(x)$ é função biunívoca

$$E[Y|Z] = E[Y|X] = E[Y|g^{-1}(Z)]$$

[BACK](#)
[NEXT](#)

46/73

ESPERANÇA CONDICIONAL

$$\diamond E[E[g(X, Y)|X]] = E[g(X, Y)]$$

$\Rightarrow f(x) = E[Y|X = x]$ é um estimador não polarizado de Y

- Esperança condicional como estimador: Seja $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m$, $Y_i \sim$ média μ e variância σ^2 , independentes entre si.

Suponha que já observamos $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ com $n < m$. Qual seria a melhor estimativa que podemos fazer do valor de Y ?

Qual é a variância dessa estimativa?

- Exercício: Chegada de trens numa estação.

[BACK](#)
[NEXT](#)

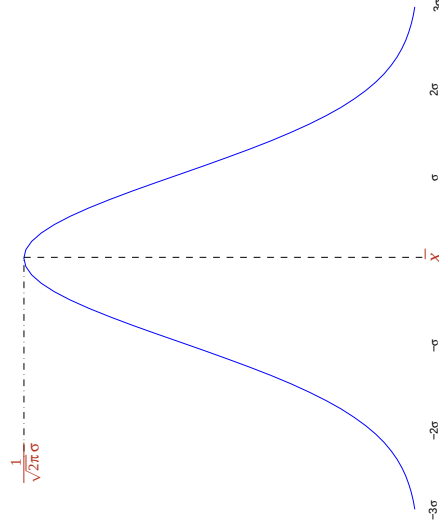
47/73

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS GAUSSIANAS

- ou, Variáveis Aleatórias Normais. $X \sim N(\bar{x}, \sigma^2)$,

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \bar{x})^2}{\sigma^2}\right)$$

quando $E[X] = \bar{x}$ e $\text{var}(X) = E[(X - \bar{x})^2] = \sigma^2$.


[BACK](#)
[NEXT](#)

48/73

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS GAUSSIANAS

- Função Característica:

$$\Phi_x(u) = \exp(ju\bar{x} - \frac{1}{2}u^2\sigma^2)$$

RESULTADO: combinação linear de v.a.'s gaussianas independentes é v.a. gaussiana.

Se $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n$, α_i são escalares e as v.a.'s X_i são independentes entre si e $X_i \sim N(\bar{x}_i, \sigma_i^2)$, podemos re-definir

$$Z_i = \alpha_i X_i, i = 1, \dots, n \Rightarrow Y = \sum_{i=1}^n Z_i$$

e tem-se que

$$\begin{aligned} Z_i &= \alpha_i X_i \sim N(\alpha_i \bar{x}_i, \alpha_i^2 \sigma_i^2) \\ \Phi_Y(u) &= \Phi_{Z_1}(u) \Phi_{Z_2}(u) \dots \Phi_{Z_n}(u) \\ &= \exp\left(ju \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i - \frac{1}{2}u^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2\right) \end{aligned}$$

Portanto $Y \sim N\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2\right)$.

[BACK](#)
[NEXT](#)

49/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS GAUSSIANAS

- Importância como modelo de fenômenos aleatórios: Teorema do Limite Central

Soma de “ações” independentes e identicamente distribuídas produzem assintoticamente o “efeito” gaussiano, i.e., $Z_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / \sqrt{n}$ onde X_i são v.a.'s quaisquer, independentes e identicamente distribuídas

$$Z = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \text{ é v.a. GAUSSIANA independente das v.a.'s } X_i$$

[BACK](#)
[NEXT](#)

50/73

VETORES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS GAUSSIANAS

Seja um conjunto de v.a.'s gaussianas $X_1, X_2, \dots, X_n$ escritas de forma vetorial:

$$Z = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad \text{com o vetor de médias } \bar{z} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix},$$

e com a matriz de covariâncias:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} E[(X_1 - \bar{x}_1)^2] & E[(X_1 - \bar{x}_1)(X_2 - \bar{x}_2)] & \cdots & E[(X_1 - \bar{x}_1)(X_n - \bar{x}_n)] \\ E[(X_2 - \bar{x}_2)(X_1 - \bar{x}_1)] & E[(X_2 - \bar{x}_2)^2] & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_n - \bar{x}_n)(X_1 - \bar{x}_1)] & E[(X_n - \bar{x}_n)^2] & \cdots & E[(X_n - \bar{x}_n)^2] \end{bmatrix}$$

[BACK](#)
[NEXT](#)

51/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

VETORES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS GAUSSIANAS

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \text{cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \sigma_2^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{X_1 X_2} \sigma_1 \sigma_2 & \cdots & \rho_{X_1 X_n} \sigma_1 \sigma_n \\ \rho_{X_2 X_1} \sigma_2 \sigma_1 & \sigma_2^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{X_n X_1} \sigma_n \sigma_1 & & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

e Σ é matriz simétrica ($\Sigma = \Sigma'$) e semidefinida positiva ($x' \Sigma x \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$).

[BACK](#)
[NEXT](#)

52/73

VETORES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS GAUSSIANAS

DEFINIÇÃO: O vetor Z de v.a.'s de dimensão n acima é CONJUNTAMENTE GAUSSIANO ou CONJUNTAMENTE NORMAL se a densidade de probabilidade conjunta tem a forma:

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z - \bar{z})' \Sigma^{-1} (z - \bar{z})\right)$$

com matriz Σ não singular, $|\Sigma| = \det(\Sigma)$.

[BACK](#)
[NEXT](#)

53/73

VETORES DE V.A.'S GAUSSIANAS: CORRELAÇÃO E INDEPENDÊNCIA

- Propriedade importante:

as v.a.'s X_i 's são não-correlatadas $\iff \text{cov}(X_i, X_j) = 0$ para todo $i \neq j$. Neste caso,

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

e

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{\sigma_i^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_1^2} \sqrt{2\pi \sigma_2^2} \dots \sqrt{2\pi \sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \dots \exp\left(-\frac{(x_n - \bar{x}_n)^2}{2\sigma_n^2}\right) \\ &= p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) \dots p_{X_n}(x_n) \end{aligned}$$

RESULTADO: Se uma família de v.a.'s gaussianas são não correlatadas $\implies$ elas são independentes entre si.

[BACK](#)
[NEXT](#)

54/73

VETORES DE V.A.'S GAUSSIANAS: FUNÇÃO CARACTERÍSTICA VETORIAL

FUNÇÃO CARACTERÍSTICA DE UM VETOR DE V.A.'S: é definida como

$$\begin{aligned}\Phi_Z(u) &:= E[e^{j u'Z}] = \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{j u'y} p_Z(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [1 + ju'y + \frac{(ju'y)^2}{2!} + \cdots] p_Z(y) dy\end{aligned}$$

para $u = (u_1 u_2 \cdots u_n)'$.

Como função geradora de momentos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_Z}{\partial u_i} \Big|_{u=(u_1 u_2 \cdots u_n)=0} &= j \int_{-\infty}^{\infty} r p_{X_i}(x) dr = j E[X_i] = j \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial^2 \Phi_Z}{\partial u_i \partial u_k} \Big|_{u=(u_1 u_2 \cdots u_n)=0} &= - \iint_{-\infty}^{\infty} r s p_{X_i X_k}(r, s) dr ds = -E[X_i X_k'] \\ &\quad i, k = 1, \dots, n\end{aligned}$$

[BACK](#)
[NEXT](#)

55/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

VETORES DE V.A.'S GAUSSIANAS: FUNÇÃO CARACTERÍSTICA VETORIAL

- Função Característica para um vetor de v.a.'s conjuntamente gaussianos:

$$\Phi_Z(u) = \exp\left(ju'\bar{z} - \frac{1}{2}u'\Sigma u\right)$$

1. Valor médio

$$\begin{aligned}E[Z] &= \frac{1}{j} \frac{\partial \Phi_Z}{\partial u} \Big|_{u=0} \\ &= \frac{1}{j} \exp\left(ju'\bar{z} - \frac{1}{2}u'\Sigma u\right) (j\bar{z} - \Sigma u) \Big|_{u=0} = \bar{z}\end{aligned}$$

Confirma-se que $\bar{z}$ é a média do vetor Z

[BACK](#)
[NEXT](#)

56/73

VETORES DE V.A.'S GAUSSIANAS: FUNÇÃO CARACTERÍSTICA VETORIAL

2. Segundo Momento

$$\begin{aligned} E[ZZ'] &= -\frac{\partial^2 \Phi_Z}{\partial u^2} \Big|_{u=0} \\ &= [(j\bar{z} - \Sigma u) \exp(ju'\bar{z} - \frac{1}{2}u'\Sigma u)(j\bar{z} - \Sigma u)' - \Sigma \exp(ju'\bar{z} - \frac{1}{2}u'\Sigma u)] \Big|_{u=0} \\ &= \overrightarrow{z\bar{z}} + \Sigma \end{aligned}$$

e note que

$$E[(Z - \bar{z})(Z - \bar{z})'] = \overrightarrow{z\bar{z}} + \Sigma - \overrightarrow{z\bar{z}} = \Sigma$$

Então confirma-se que $\bar{z}$ é a média e Σ covariância do vetor Z .

[BACK](#)
[NEXT](#)

57/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

MOMENTOS DE ORDEM SUPERIOR

3.

$$\begin{aligned} E[z] &= \bar{z} \\ E[(z - \bar{z})^2] &= \sigma_z^2 \\ E[(z - \bar{z})^{2k+1}] &= 0 \\ E[(z - \bar{z})^{2k}] &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k - 1) \sigma_z^{2k} \end{aligned}$$

[BACK](#)
[NEXT](#)

58/73

V.A.'S GAUSSIANNAS: PROPRIEDADES DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA

4. Notação: $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$. Com isso,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Resumo de propriedades:

(a) $|\sigma_{ij}| \leq \sigma_i\sigma_j, \quad \forall i, j$

[BACK](#)[NEXT](#)

59/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

V.A.'S GAUSSIANNAS: PROPRIEDADES DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA

(b) $|\Sigma| \neq 0$, Σ é matriz definida positiva e Σ^{-1} existe se e somente se as v.a.'s $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ forem linearmente independentes:

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i X_i \iff a_i = 0, \quad \forall i$$

isto é equivalente a exigir que os coeficientes de correlação $|\rho_{ij}| < 1$ (mostre isso!).

(c) Se Σ é matriz diagonal, $\sigma_{ij} = 0$ e as variáveis aleatórias X_i são não correlacionadas. Como são V.A.'s GAUSSIANNAS $\implies X_i, i = 1, 2, \dots, n$ são independentes entre si.

[BACK](#)[NEXT](#)

60/73

V.A.'S GAUSSIANNAS DEFINIDAS ATRAVÉS DA SOMA

5. Seja $Z \sim N(\bar{z}, \Sigma_z)$, um vetor de v.a.'s gaussianas, e defina $Y = AZ$ para alguma matriz A .

Então a função característica é

$$\begin{aligned}\Phi_Y(u) &= E[\exp^{ju'Y}] = E[\exp^{ju'AZ}] = \Phi_Z(\tilde{u}) = A'u) \\ &= \exp(j\tilde{u}'\bar{z} - \frac{1}{2}\tilde{u}'\Sigma_z\tilde{u}) = \exp(ju'Az - \frac{1}{2}u'AS_zA'u)\end{aligned}$$

isto é, $y \sim N(A\bar{z}, AS_zA')$.

Se $Y = AZ + b$ para alguma matriz A e vetor b , é evidente que $y \sim N(A\bar{z} + b, AS_zA')$ (mostre!).

[BACK](#)
[NEXT](#)

61/73

V.A.'S GAUSSIANNAS DEFINIDAS ATRAVÉS DA SOMA

6. Sejam X e Y dois vetores gaussianos, então $X + Y$ é gaussiano.

Escolher $A = [I_n \ : \ I_n]$ e $z = \begin{bmatrix} x \\ \dots \\ y \end{bmatrix}$ e utilizar o resultado em 5.

[BACK](#)
[NEXT](#)

62/73

VETORES NÃO CORRELACIONADOS DE V.A.'S GAUSSIANS

7. Se dois vetores gaussianos X e Y são não correlacionados, isto é $\sigma_{X_i Y_j} = 0, \forall i, j$ ($\equiv \sigma_{Y_i X_j} = 0, \forall i, j$), então eles são independentes.

Seja $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ e $z = \begin{bmatrix} x \\ \dots \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r=n+m}$. Então,

$$p_{X,Y}(x,y) = p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^r |\Sigma_z|}} \exp^{-\frac{1}{2}(z-\bar{z})' \Sigma_z^{-1} (z-\bar{z})}$$

E neste caso,

$$\Sigma_z = \begin{bmatrix} \Sigma_x & 0 \\ 0 & \Sigma_y \end{bmatrix} \rightarrow \Sigma_z^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_x^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_y^{-1} \end{bmatrix}, |\Sigma_z| = |\Sigma_x| |\Sigma_y|$$

BACK

NEXT

63/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

VETORES NÃO CORRELACIONADOS DE V.A.'S GAUSSIANS

Assim,

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma_x|}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\Sigma_y|}} \cdot \\ &\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\bar{x})' \Sigma_x^{-1} (x-\bar{x})\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\bar{y})' \Sigma_y^{-1} (y-\bar{y})\right) \\ &= p_X(x) p_Y(y) \quad \checkmark \end{aligned}$$

DENSIDADE CONDICIONAL DE VETORES GAUSSIANS

8. Propriedade: Considere X e Y dois vetores de v.a.'s gaussianas. A DENSIDADE CONDICIONAL $p_X(x|Y=y_0)$ (ou $p_Y(y|X=x_0)$) é também gaussiana.

BACK

NEXT

64/73

DENSIDADE CONDICIONAL DE VETORES GAUSSIANOS

Para verificar essa propriedade, escrevemos $p_X(x|Y = y_0) = p_X(x|y_0)$, e considere

$$p_X(x|y_0) = \frac{p_{X,Y}(x, y_0)}{p(y_0)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \frac{|\Sigma_z|}{|\Sigma_y|}}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(z - \bar{z})' \Sigma_z^{-1} (z - \bar{z})\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}(y_0 - \bar{y})' \Sigma_y^{-1} (y_0 - \bar{y})\right)}$$

onde tomamos $z = \begin{bmatrix} y \\ \dots \\ x \end{bmatrix}$. Supomos também que a matriz de covariâncias Σ_z é matriz definida positiva.

Para uma matriz inversível A qualquer dividida em blocos: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ onde tomamos A_{11} e A_{22} como matrizes quadradas de dimensões quaisquer, podemos expressar a inversa de A em termos dos blocos como

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$

Utilizando essas relações, junto com o fato que Σ_z é matriz simétrica, e portanto $\Sigma_{xy} = \Sigma'_{yx}$, podemos avaliar:

$$\Sigma_z^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_y & \Sigma_{yx} \\ \Sigma'_{yx} & \Sigma_x \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\Sigma_y - \Sigma_{yx}\Sigma_x^{-1}\Sigma'_{yx})^{-1} & -\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx}(\Sigma_x - \Sigma'_{yx}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1} \\ -(\Sigma_x - \Sigma'_{yx}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1}\Sigma'_{yx}\Sigma_y^{-1} & (\Sigma_x - \Sigma'_{yx}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1} \end{bmatrix}$$

[BACK](#)
[NEXT](#)

65/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

Portanto

$$\begin{aligned} (z - \bar{z})' \Sigma_z^{-1} (z - \bar{z}) &= (x - \bar{x})' (\Sigma_x - \Sigma'_{yx}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1} (x - \bar{x})' \\ &\quad - (x - \bar{x})' (\Sigma_x - \Sigma'_{yx}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1} \Sigma'_{yx}\Sigma_y^{-1} (y_0 - \bar{y}) \\ &\quad - (y_0 - \bar{y})' \Sigma_y^{-1} \Sigma_{yx} (\Sigma_x - \Sigma'_{yx}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1} (x - \bar{x}) \\ &\quad + (y_0 - \bar{y})' (\Sigma_y - \Sigma_{yx}\Sigma_x^{-1}\Sigma'_{yx})^{-1} (y_0 - \bar{y}) = \\ &= [(x - \bar{x}) - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}(y_0 - \bar{y})]' (\Sigma_x - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1} [(x - \bar{x}) - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}(y_0 - \bar{y})] + \\ &\quad + (y_0 - \bar{y})' (\Sigma_y - \Sigma_{yx}\Sigma_x^{-1}\Sigma'_{yx})^{-1} (y_0 - \bar{y}) \\ &\quad - (y_0 - \bar{y})' \Sigma_y^{-1} \Sigma_{xy} (\Sigma_x - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1} \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1} (y_0 - \bar{y}) \end{aligned}$$

como os últimos dois termos acima só envolvem y_0 e $\bar{y}$ que são constantes, podemos finalmente escrever:

$$p_X(x|y_0) = \text{cte} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}[x - \bar{x} - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}(y_0 - \bar{y})]' (\Sigma_x - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1} [x - \bar{x} - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}(y_0 - \bar{y})]\right)$$

É evidente que essa distribuição é gaussiana pois em se tratando de distribuição a constante não avaliada deve ser tal que

$$\int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x|y_0) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$$

além disso, denotando,

$$\mu = \bar{x} + \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}(y_0 - \bar{y}), \quad \Lambda = \Sigma_x - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx}$$

então, $p_X(x|y_0) = \text{cte} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}[x - \mu]' \Lambda^{-1} [x - \mu]\right)$ é evidentemente gaussiana já que $\Lambda = \Lambda'$ e Λ é matriz definida positiva. □

[BACK](#)
[NEXT](#)

66/73

9. Como consequência do item anterior, temos que a média condicional e a variância condicional do vetor X são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} E[X|Y = y_0] &= \bar{x} + \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}(y_0 - \bar{y}) \\ E[(X - \bar{x})^2|Y = y_0] &= \Sigma_x - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx} \triangleq \Sigma_{x|y} \end{aligned}$$

Note que a variância condicional não depende do valor específico da observação $Y = y_0$ da v.a, e que $\Sigma_{x|y} \leq \Sigma_x$ no sentido de matrizes semipositiva definida.

Ex: Matlab

EXERCÍCIOS

1. (a) Se $A \cap B = \emptyset$, pode-se concluir algo sobre a independência de A e B ?
(b) Mostre que um evento de probabilidade nula ou de probabilidade 1 é independente de outro evento qualquer.
2. Feita uma pesquisa com alunos(as) da Unicamp, descobriu-se que 85% dos alunos do sexo masculino (sm) e 92% do sexo feminino (sf) gostam de ir ao cinema. Destes, descobriu-se que as preferências se distribuem pelos gêneros investigados da seguinte forma:

gênero	sm	sf
aventura:	85%	60%
romance:	45%	97%
terror:	20%	12%

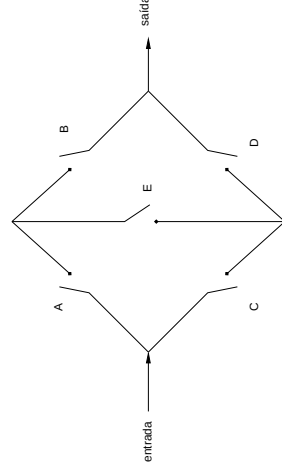
Suponha que as populações masculinas e femininas sejam de mesmo tamanho, já subtraindo você mesmo.

- (a) Qual é a probabilidade que a sua colega Elizelda goste de filmes de romance?

- (b) Qual é a probabilidade que o 1o. estudante que passe por você seja uma aluna que goste de filmes de aventura?
- (c) Qual é a probabilidade que seu colega José goste de filmes de aventura e de terror, sendo que o total de estudantes do sm que gostam de cinema de aventura ou de terror totalizam 100%?
3. (probabilidade total) Suponha que a ocorrência ou não de chuva dependa das condições do tempo no dia imediatamente anterior. Admita-se que se chove hoje, choverá amanhã com probabilidade 0,7 e que se não chover hoje, choverá amanhã com probabilidade 0,4. Sabendo-se que choveu hoje, calcule a probabilidade de que choverá depois de amanhã.

69/73

4. (probabilidade total) Numa rede com chaves como na figura abaixo, as chaves operam independentemente, fechando-se com probabilidade p e mantendo-se abertas com probabilidade $1 - p$.

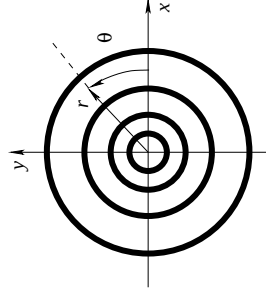


- (a) Encontre a probabilidade que um sinal aplicado na entrada será recebido na saída;
- (b) Encontre a probabilidade condicional que a chave E está aberta, dado que o sinal foi recebido.

70/73

5. Jogo de Dardos. Considere

$$\left. \begin{aligned} p_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \\ p_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} X \text{ e } Y \text{ independentes} \end{array}$$



- (a) Determine $p_{R,\Theta}(r, \theta)$. Mostre que R e Θ são independentes entre si.
- (b) Faça um programa Matlab que simule os lançamentos de dardos, *utilizando somente a rotina* `rand` para gerar valores aleatórios. Para construir a figura de um alvo utilize o seguinte código:

```
% constroi o alvo com 20 cm de raio
clf, clear all
theta=(0:.01:2*pi)';
```

71/73

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

```
polar(theta,20*ones(size(theta)),'k')
hold on
```

6. (esperança condicional) Demonstre a validade da lei da variância total, também conhecida como fórmula da variância condicional

$$\text{var}(Y) = E(\text{var}(Y|X)) + \text{var}(E[Y|X])$$

7. (esperança condicional) Considere que um certo número de mensagens são geradas em um nó de comunicação, à uma taxa média ν por unidade de tempo, apresentando variância σ_ν^2 nesse número. Cada mensagem possui um número médio de η bits e a variância do número de bits por mensagem é σ_η^2 . Elas são enviadas através um canal, e deseja-se conhecer o número médio e a variância de bits que deverão trafegar pelo canal de comunicação por unidade de tempo.
8. Um sinal binário S é transmitido com $P(S = 1) = p$ e $P(S = -1) = 1 - p$. O sinal recebido é $Y = S + N$, com N uma variável aleatória gaussiana de média nula e variância unitária. Determine a probabilidade de $S = 1$ como função da observação y da v.a. Y .

72/73

9. (distribuição condicional de v.a. gaussiana) Considere novamente o problema do jogo de dardos supondo agora um modelo mais elaborado para os lançamentos. As coordenadas X e Y são duas v.a.'s gaussianas conjuntas com $X \sim N(0, \sigma_x^2)$ e $Y \sim N(0, \sigma_y^2)$, mas agora elas são dependentes entre si, com $\text{cov}(X, Y) = \sigma_{xy}$. Calcule a distribuição conjunta nas coordenadas ortogonais. Supondo que ao lançar-se um dardo se conheça a abcissa $Y(\omega) = 4\text{mm}$ determine:
- (a) a distribuição condicional de X ,
 - (b) a média condicional de X ,
 - (c) a variância condicional de X .
 - (d) Sabendo que a mosca do alvo tem 1 cm de diâmetro, indique a probabilidade de se ter atingido a mosca. Utilize $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 25$ e $\sigma_{xy} = 15$ e expresse o resultado empregando da função $\text{Erf}(x)$.