UMA INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

- $\Omega =$ ESPAÇO AMOSTRAL $\rightarrow$ Conjunto de todos os possíveis resultados

  Ex: $\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$; $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$; $\Omega = \{x \in \Re;\, 0 \leq x \leq 1\}$

- EVENTOS: Qualquer subconjunto de Ω pertencente a uma classe de conjuntos.

$$\omega \text{ é um evento elementar} \quad \leftrightarrow \quad \text{é um ponto genérico de } \Omega$$

$$\Omega = \text{evento certo}; \quad \emptyset = \text{evento impossível}$$

$$\text{Associamos: resultados de experimentos} \quad \leftrightarrow \quad \text{eventos} \quad \leftrightarrow \quad \text{conjuntos}$$

Seja $A =$ conjunto de resultados x

$B =$ conjunto de resultados y

"Ocorre x ou y" $\leftrightarrow A$ ou B $\leftrightarrow$ $A \bigcup B$

"Ocorre x e y" $\leftrightarrow A$ e B $\leftrightarrow$ $A \bigcap B$

"Não ocorre x" $\leftrightarrow$ não A $\leftrightarrow$ $\bar{A}$ ou A^c

"x e y mutuamente exclusivos $\leftrightarrow$ ou A ou B $\leftrightarrow$ $A \bigcap B = \emptyset$

- Subconjuntos formam um CAMPO DE BOREL.

  $\mathcal{F}$ = campo de Borel $\rightarrow$ Um campo não vazio $\mathcal{F}$ satisfazendo

  (i) Se $A \in \mathcal{F}$ então $A^c \in \mathcal{F}$

  (ii) Se $A, B \in \mathcal{F}$ então $A \cup B \in \mathcal{F}$

  (iii) $\Omega \in \mathcal{F}$

  Propriedades de um campo (ou álgebra ou anel) de Borel:

  – $\emptyset \in \mathcal{F}$

  – Se A e $B \in \mathcal{F}$ então $A \cap B \in \mathcal{F}$ e $A - B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$

- Extensão: σ-ÁLGEBRA DE BOREL

  (i) Se $A_i \in \mathcal{F}$ então $A_i^c \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$

(ii)' Se $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$ então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

(iii) $\Omega \in \mathcal{F}$

PROBABILIDADE

- PROBABILIDADE: é qualquer função real definida sobre a classe $\mathcal{F}$ de Borel, $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para $A, B \in \mathcal{F}$:

  (i) $P(A) \geq 0$

  (ii) $P(\Omega) = 1$

  (iii) Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

  Exs: $\Omega = \{$cara, coroa$\}$; par-ímpar; eventos elementares

- Propriedades:

  1. $P(\emptyset) = 0$
  2. $P(A^c) = 1 - P(A)$
  3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  4. Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$

  Prova

- Espaço de Probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (ou de experimentos):

  Ω =espaço amostral, $\mathcal{F}$ =classe de eventos, P = função probabilidade

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- Seja B um evento tal que $P(B) > 0$, então para todo evento A

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

"é a probabilidade de A dado que B ocorreu"

$P(\cdot|B)$ é probabilidade ?

- PROBABILIDADE TOTAL: Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos mutuamente exclusivos com $P(A_i) > 0$, tal que $B \subset A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ então

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

  Prova

- REGRA DE BAYES:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

INDEPENDÊNCIA

Dois eventos A e B são INDEPENDENTES se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Três eventos A, B, e C são independentes entre si se

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B) \cdot P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{aligned}$$

  Ex: independência 2 a 2 não implica a independência entre 3 eventos

- Propriedades: Se A e B são independentes então
  - $P(A|B) = P(A)$
  - A^c e B^c, A e B^c, A^c e B são independentes

PROBABILIDADE CONJUNTA

Os elementos do espaço amostral Ω podem apresentar atributos que permitem a definição de diferentes classes de Borel:

$-A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_1$

$-B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}_2$

Ex: Joaquim, Pedro, Maria $\rightarrow$ $\Omega =$ atributos: idade, altura

$A_1 = 5$ anos $\qquad B_1 = 1.80$ m

Ω é um conjunto de pares ordenados

- Probabilidade conjunta:

$$P(A,B) = P(A \cap B) = \text{ocorrência de } A \text{ e de } B$$

- Probabilidade marginal:

$$\text{Para } A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega \quad \text{e} \quad B_1 + B_2 + \ldots + B_m = \Omega$$

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i, B_j) = P(*, B_j)$$

$$P(A_i) = \sum_{j=1}^{m} P(A_i, B_j) = P(A_i, *)$$

e

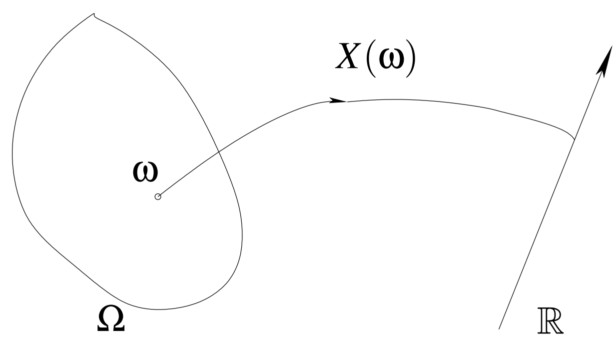
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(A_i, B_j) = 1$$

VARIÁVEL ALEATÓRIA

É qualquer função definida no espaço amostral Ω, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in (-\infty, x]\} \in \mathcal{F}$$

isto é, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é função MENSURÁVEL



Exs: dado, placa de metal

- se Ω é enumerável então a variável aleatória é DISCRETA, caso contrário é CONTÍNUA.

  Conjunto Enumerável $\to$ conjunto finito ou infinito, com uma correspondência biunívoca com os números inteiros positivos.

FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

$$F_X(x) \stackrel{\triangle}{=} P(\{X(\omega) \leq x\})$$

$\{X(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in (-\infty, x]\} \in \mathcal{F}$, ou seja, é um evento.

Ex: Variável aleatória tempo de espera

- Propriedades:

  - ⋆ $F_X(-\infty) = 0$
  - ⋆ $F_X(+\infty) = 1$
  - ⋆ Se $x_2 > x_1$, então $F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$ (função monotônica não decrescente)

  Prova:

- FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

$$p_X(x) \stackrel{\triangle}{=} \frac{d}{dx} F_X(x)$$

  Ex: distribuição uniforme

  - ⋆ $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(y)\, dy$ uma vez que $F_X(-\infty) = 0$
  - ⋆ $p_X(x) \geq 0$ pois $F_X(x)$ é monótona não decrescente

- Função Impulso de Dirac $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \delta(t - t_0)\, dt = f(t_0) \quad \forall f(t) \text{ contínua em } t_0.$$

  Propriedades:

  - ⋆ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \delta(t)\, dt = f(0)$
  - ⋆ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$
  - ⋆ $\int_{-\infty}^{t} \delta(s)\, ds = u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ (função degrau)

$$\text{“}\ \frac{d}{dt} u(t) \stackrel{\triangle}{=} \delta(t)\ \text{''}$$

- Funções Distribuição e Densidade para v. a. discreta

$$p_X(x) = \sum_{i=1}^{n} P\{X = x_i\} \cdot \delta(x - x_i)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(y)\,dy = \sum_{i=1}^{n} P\{X = x_i\} \cdot \int_{-\infty}^{x} \delta(y - x_i)\,dy$$

- Algumas Propriedades de F_X e p_X :

$$P\{X > x\} = 1 - F_X(x) = \int_{x}^{-\infty} p_X(y)\,dy$$

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p_X(y)\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(y)\,dy = 1 = F_X(+\infty) - F_X(-\infty)$$

$$p_X(x) = lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS GAUSSIANAS

$Z \sim N(0,1) \quad \to \quad$ é v.a. normal 0-1

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

$$P\{|Z| < 1\} = 0,68$$

$$\text{Erf}(x) \stackrel{\triangle}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\,dz = P\{Z \leq x\}$$

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS

Ou, estudo de distribuições conjuntas

$$F_{XY}(x,y) \stackrel{\triangle}{=} P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

com $\{X \leq x, Y \leq y\} = \{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\} = \{\omega \in \Omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in D\}$, onde $D = (-\infty, x] \times (-\infty, y]$

$$p_{XY}(x,y) \stackrel{\triangle}{=} \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

⋆ Propriedades:

– $F_{XY}(-\infty, y) = 0$

– $F_{XY}(x, -\infty) = 0$

– $F_{XY}(+\infty, +\infty) = 1$

Prova:

⋆ Distribuição Marginal:

$$F_{XY}(+\infty, y) = F_Y(y)$$

$$F_{XY}(x, +\infty) = F_X(x)$$

pois $\{X \leq \infty, \, Y \leq y\} = \{Y \leq y\}$

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} p_{XY}(x,y) \, dx \, dy$$

⋆ Mais Propriedades:

$$\diamond \quad p_X(x) = \frac{d}{dx} F_{XY}(x, +\infty) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(z,y) \, dy \, dz$$

$$\diamond \quad p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x,y) \, dy$$

Ex:

Variáveis Aleatórias Bidimensionais Independentes

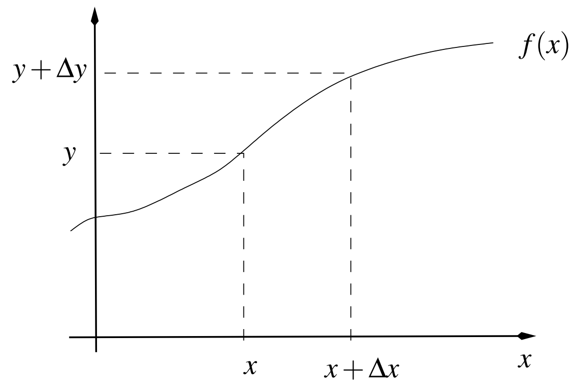
$$F_{XY}(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\} \cdot P\{Y \leq y\}$$

Assim,

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$
$$p_{XY}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

FUNÇÃO DE VARIÁVEL ALEATÓRIA

- $Y = f(X)$ e X v.a. conhecida.
  - Suponha $f(x)$ monotônica crescente (biunívoca)



$$F_Y(y) = F_X\left[f^{-1}(y)\right]$$

e como $p_X(x)\,\Delta x \approx p_Y(y)\,\Delta y$,

$$p_Y(y) = \left.\frac{p_X(x)}{\dfrac{df(x)}{dx}}\right|_{x=f^{-1}(y)} \qquad \text{pois} \quad \frac{df(x)}{dx} > 0$$

  - Suponha agora $\dfrac{df(x)}{dx} < 0$ (monotônica decrescente)

$$p_Y(y) = \left.\frac{p_X(x)}{-\dfrac{df(x)}{dx}}\right|_{x=f^{-1}(y)}$$

  - Portanto, no caso geral de função biunívoca:

$$p_Y(y) = \left.\frac{p_X(x)}{\left|\dfrac{df(x)}{dx}\right|}\right|_{x=f^{-1}(y)}$$

Ex: Seja X uma v.a. com distribuição uniforme entre 0 e 1 e seja $Y \triangleq \dfrac{1}{\lambda} \cdot \ln \dfrac{1}{X}$ com $\lambda > 0$. Como determinar p_Y e F_Y ?

- No caso geral $\rightarrow$ dividimos o domínio em intervalos adequados onde em cada um deles a função seja biunívoca. Como resultado:

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_X(x)}{\left|\frac{df_i(x)}{dx}\right|}\Bigg|_{x=f_i{}^{-1}(y)}$$

onde N é o número de regiões R_i, com

$$\bigcup_{i=1}^{N} R_i = \text{Domínio} \quad \text{e} \quad f_i(x) = f(x)\,,\, x \in R_i$$

Ex: $X \sim N(0,\sigma^2)$, $Y = X^2$ desejo $p_Y(y)$

- Mesmo problema, agora com duas variáveis

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \qquad p_{UV}(u,v) = ?$$

- Supondo uma tranformação biunívoca:

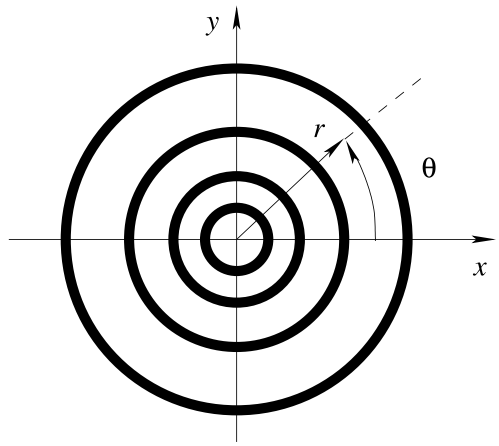
$$p_{UV}(u,v) = \frac{p_{XY}(x,y)}{\left|J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)\right|}\Bigg|_{\substack{x=f(u,v)\\ y=g(u,v)}}$$

onde f e g são funções inversas de u e de v, e J é o Jacobiano:

$$J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}}$$

Ex: Jogo de Dardos



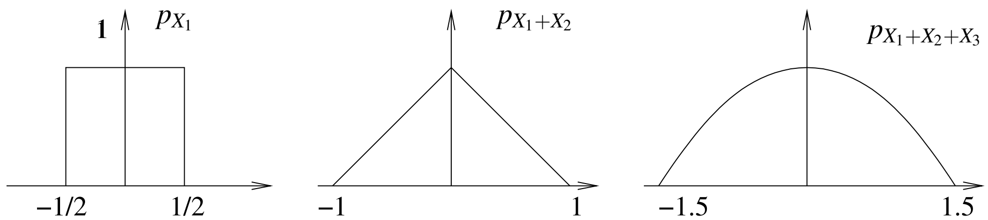
$$\left.\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \\ p_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{independentes}$$

desejamos determinar $p_{R,\Theta}(r,\theta)$

Ex: $Z = X + Y$, X e Y independentes; $p_Z(z)$?

Resultado: $p_Z = p_X * p_Y$

Ex: Generalização importante: soma de n v.a.'s independentes



- Generalização importantíssima: TEOREMA DO LIMITE CENTRAL:

  $Z_n = \big(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\big)/\sqrt{n}$ onde X_i são v.a.'s independentes e identicamente distribuídas

$$Z = \lim_{n\to\infty} Z_n \ \text{ é v.a. GAUSSIANA independente das v.a.'s } X_i$$

MOMENTOS

Esperança matemática ou média ou momento de 1a. ordem

$$\begin{aligned} E[X] \stackrel{\triangle}{=} \bar{x} &= \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x)\, dx < +\infty \end{aligned}$$

Para isso X é necessariamente V.A. INTEGRÁVEL:

$$E[|X|] = -\int_{-\infty}^{0} x\, dF_X(x) + \int_0^{\infty} x\, dF_X(x) < +\infty$$

Ex: V.A. de Cauchy $p_X(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \cdot \dfrac{1}{\pi}$, porém $E[|X|] = \infty$.

- Para VARIÁVEIS ALETÓRIAS DISCRETAS:

$$p_X(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\{X = x_k\} \cdot \delta(x - x_k)$$

$$E[X] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\{X = x_k\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\delta(x - x_k)\,dx$$

então

$$E[X] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \cdot P\{X = x_k\}$$

Ex: Face de um dado

- Se $p_X(x)$ for FUNÇÃO PAR, i.e. $p_X(-x) = p_X(x)$; e $E[X] < +\infty$, então $E[X] = 0$

  Ex: gaussiana N(μ, σ^2)

- MÉDIA DE UMA FUNÇÃO $Y = f(X) \;\leftrightarrow\; E[Y]$?

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,p_X(x)\,dx < +\infty$$

Ex: X uniforme entre 0 e 1; $Y = \frac{1}{\lambda}\ \ln\frac{1}{X}$

- Propriedade: ADITIVIDADE DA MÉDIA

$$\begin{aligned} E[f_1(X) + f_2(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x) + f_2(x)] \cdot p_X(x)\,dx \\ &= E[f_1(X)] + E[f_2(X)] \end{aligned}$$

- MOMENTOS DE ORDEM k

$$m_k \stackrel{\triangle}{=} E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot p_X(x)\,dx < +\infty$$

$m_1 \;\rightarrow\;$ média ($\bar{x}$ ou μ) $\quad m_2 \;\rightarrow\;$ segundo momento

- Momentos centrados de ordem k

$$c_k \stackrel{\triangle}{=} E[(X-\mu)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \cdot p_X(x)\, dx$$

$c_1 \equiv 0$, $c_2 \rightarrow$ variância (σ^2), σ = desvio padrão

$$\sigma^2 = m_2 - {m_1}^2 = m_2 - \mu^2$$

  - Se $p_X(x)$ for simétrica em torno de μ : $p_X(x-\mu) = p_X(-(x-\mu))$ então $c_k = 0$, $\forall k$ ímpar

- ◦ Ex: Suponha conhecidos apenas μ e σ^2. Aproxime o valor de $E[X^3]$ em torno de μ.

- ◦ Ex: $X \sim$ uniforme $[0,1]$

- ◦ Ex: $X \sim N(0,\sigma^2)$

- Desigualdade de Markov $X \sim$ v.a não negativa ($p_X(x) = 0$, $x < 0$)

$$P\{X \geq \alpha\mu\} \leq \frac{1}{\alpha}$$

- Desigualdade de Tchebycheff

$$P\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \ \ ; \varepsilon > 0$$

- Média para duas variáveis

$$E[f(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, p_{XY}(x,y)\, dx\, dy < +\infty$$

  - Se X e Y são independentes:

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$$

$$E[f(X) \cdot g(Y)] = E[f(X)] \cdot E[g(Y)]$$

CORRELAÇÃO E COVARIÂNCIA

- COVARIÂNCIA: Com $\bar{x} = E[X]$ e $\bar{y} = E[Y]$

$$\text{cov}(X,Y) \stackrel{\triangle}{=} E[(X-\bar{x})\cdot(Y-\bar{y})]$$

  - variáveis não correlatas ou não correlacionadas $\Leftrightarrow$ $\text{cov}(X,Y) = 0$

$$\text{cov}(X,Y) = E[X\cdot Y] - E[X]\cdot E[Y]$$

  - $\text{cov}(X,X) = E[(X-\bar{x})\cdot(X-\bar{x})] = E[(X-\mu)^2] = \sigma_X{}^2$
  - "Se X e Y são independentes $\Rightarrow$ são não correlatas"
  - "Se X e Y são não correlatas, não implica que sejam independentes"
    Exceção: "Se X e Y são gaussianas não correlatas, então são v.a.'s independentes"
  - " Duas variáveis são não correlatas $\Leftrightarrow$ $E[X\cdot Y] = E[X]\cdot E[Y]$"
  - $\sigma^2_{X+Y} = \sigma_X{}^2 + \sigma_Y{}^2 + 2\,\text{cov}(X,Y)$
  - $\sigma_{X+Y}{}^2 = \sigma_X{}^2 + \sigma_Y{}^2$ se X e Y são não correlatas

- CORRELAÇÃO: $R_{XY} \stackrel{\triangle}{=} E[X\cdot Y]$

- COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO ρ_{XY}

$$\rho_{XY} \stackrel{\triangle}{=} \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}$$

  note que $|\rho_{XY}| < 1$

  Ex: $Y = a\cdot X + b$

FUNÇÃO CARACTERÍSTICA

$$\Phi(u) \overset{\triangle}{=} E[\exp(juX)] = \int \exp(jux) \cdot p_X(x)\, dx$$

$j = \sqrt{-1}$ e u parâmetro real

$$\Phi(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-jux) \cdot p_X(x)\, dx$$

Transformada de Fourier de $p_X(x)$

$$P_X(u) = \mathcal{F}[p_X(x)] = \Phi(-u)$$

- Se X e Y são independentes e $Z = X + Y$

$$P_Z(u) = P_{X+Y}(u) = P_X(u) \cdot P_Y(u)$$

$$p_Z(z) = \mathcal{F}^{-1}[P_X(u) \cdot P_Y(u)] = p_X(z) * p_Y(z)$$

- $|P_X(u)| \leq 1$, existe para todo $p_X(x)$
- $P_X(u) = E[\exp(-juX)] = \sum_{k=0}^{+\infty} m_k \cdot \frac{(-ju)^k}{k!}$ ou

$$m_k \cdot (-j)^k = \left. \frac{d^k P_X(u)}{du^k} \right|_{u=0}$$

Propriedade: É FUNÇÃO GERADORA DE MOMENTOS

Ex. Soma de duas v.a's gaussianas $\Phi_x(u) = \exp(ju\bar{x} - \frac{1}{2}u^2\sigma^2)$

DISTRIBUIÇÃO E DENSIDADE CONDICIONAIS

$$F_X(x|A) \triangleq \frac{P\{X \leq x\,,\,A\}}{P(A)} = P\{X \leq x|A\}$$

evento: $\{X \leq x\,,\,A\} = \{\omega \in S : X(\omega) \in (-\infty, x]\} \cap \{\omega \in A\}$

$$p_X(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x), \qquad p_X(x|A) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x|A)$$

Tomando $A = \{X \geq a\}$:

$$F_X(x|X \geq a) = \frac{P\{X \leq x\,,\,X \geq a\}}{P\{X \geq a\}}$$

- para $x < a \;\;\Rightarrow\;\; F_X(x|X \geq a) = 0$
- para $x \geq a$

$$F_X(x|X \geq a) = \frac{P\{a \leq X \leq x\}}{P\{X \geq a\}} = \int_a^x p_X(y)\,dy \Bigg/ \left(1 - \int_{-\infty}^a p_X(y)\,dy\right)$$

$$= \int_a^x p_X(y)\,dy \Bigg/ \int_a^{+\infty} p_X(y)\,dy$$

Também

$$p_X(x|X \geq a) = \frac{p_X(x)}{\int_a^{+\infty} p_X(y)\,dy} \cdot u(x-a)$$

- ESPERANÇA CONDICIONAL

$$E[X|A] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_X(x|A)\, dx$$

$$E[X|X \geq a] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_X(x|X \geq a)\, dx = \frac{\int_a^{+\infty} x \cdot p_X(x)\, dx}{\int_a^{+\infty} p_X(x)\, dx}$$

- Condicional sobre um valor

  – X V.A. DISCRETA: $F_Y(y|X=a)$ faz sentido pois

  $$F_Y(y|X=a) = \frac{P\{Y \leq y, X = a\}}{P\{X=a\}}$$

  só pode ser definido nos pontos onde $P\{X=a\} \neq 0$

  – X V.A. DISCRETA: Definir pequenos intervalos $[a, a+\Delta a]$, com $\Delta a \to 0^+$

  $$F_X(x|a \leq X \leq a+\Delta a) = u(x-a)$$
  $$p_X(x|X=a) = \delta(x-a)$$

  – Cálculo de $p_Y(y|x)$ supondo p_X e p_{XY} contínuas

  $$F_Y(y|x \leq X \leq x+\Delta x) = \frac{P\{Y \leq y\, ,\, x \leq X \leq x+\Delta x\}}{P\{x \leq X \leq x+\Delta x\}}$$

  com $\Delta x \approx 0$

  $$F_Y(y|x \leq X \leq x+\Delta x) \approx \frac{\int_{-\infty}^{y} p_{XY}(x,\alpha)\, d\alpha}{p_X(x)} \quad \text{e então} \quad p_Y(y|x) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)}$$

- Esperança Condicional como Variável Aleatória

$$E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, p(y|x)\, dy \quad \Rightarrow \quad \text{é uma função } x \to f(x)$$

assim $E[Y|X] = f(X(\omega))$ é v.a.

- Propriedades:
  - $\diamond$ $E[E[Y|X]] = E[Y]$
  - $\diamond$ $E[E[g(X,Y)|X]] = E[g(X,Y)]$
    $\Rightarrow f(x) = E[Y|X = x]$ é um estimador não polarizado de Y
  - $\diamond$ Se $g(x)$ é função determinística

$$E[Yg(X)|X = x] = g(x)E[Y|X = x]$$

  - $\diamond$ Se $z = g(x)$ é função biunívoca

$$E[Y|Z] = E[Y|X] = E[Y|g^{-1}(Z)]$$

- Esperança condicional como estimador: Seja $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$,, $X_i \sim$ média μ e variância σ^2, não correlatas duas a duas.

  Suponha que já observamos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ com $n < m$. Qual seria a melhor estimativa que podemos fazer do valor de Y?

  Qual é a variância dessa estimativa?

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS GAUSSIANAS

- ou, Variáveis Aleatórias Normais. $X \sim N(\bar{x}, \sigma^2)$,

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma^2}\right)$$

quando $E[x] = \bar{x}$ e $\text{var}(X) = E[(x-\bar{x})^2] = \sigma^2$.

- Função Característica:

$$\Phi_x(u) = \exp(ju\bar{x} - \frac{1}{2}u^2\sigma^2)$$

RESULTADO: combinação linear de v.a's gaussianas independentes é v.a. gaussiana.

Se $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n$, α_i são escalares e as v.a's X_i são independentes entre si e $X_i \sim N(\bar{x}_i, \sigma_i^2)$, podemos re-definir

$$Z_i = \alpha_i X_i, i = 1, \ldots, n \Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

e tem-se que

$$\begin{aligned} Z_i = \alpha_i X_i &\sim N(\alpha_i \bar{x}_i, \alpha_i^2 \sigma_i^2) \\ \Phi_y(u) &= \Phi_{z_1}(u)\Phi_{z_2}(u)\cdots\Phi_{z_n}(u) \\ &= \exp\left(ju\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{x}_i - \frac{1}{2}u^2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\sigma_i^2\right) \end{aligned}$$

Portanto $Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{x}_i, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\sigma_i^2\right)$.

- Importância como modelo de fenômenos aleatórios: Teorema do Limite Central

Soma de "ações"independentes e identicamente distribuídas produzem assintoticamente o "efeito"gaussiano, i.e., $Z_n = \left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right)/\sqrt{n}$ onde X_i são v.a.'s quaisquer, independentes e identicamente distribuídas

$$Z = \lim_{n\to\infty} Z_n \ \text{ é v.a. GAUSSIANA independente das v.a.'s } X_i$$

VETORES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS GAUSSIANAS

Seja um conjunto de v.a.'s gaussianas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ escritas de forma vetorial:

$$Z = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \text{ com o vetor de médias } \bar{z} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix},$$

e com a matriz de covariâncias:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} E[(X_1-\bar{x}_1)^2] & E[(X_1-\bar{x}_1)(X_2-\bar{x}_2)] & \cdots & E[(X_1-\bar{x}_1)(X_n-\bar{x}_n)] \\ E[(X_2-\bar{x}_2)(X_1-\bar{x}_1)] & E[(X_2-\bar{x}_2)^2] & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ E[(X_n-\bar{x}_n)(X_1-\bar{x}_1)] & & \cdots & E[(X_n-\bar{x}_n)^2] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \mathrm{cov}(X_1,X_2) & \cdots & \mathrm{cov}(X_1,X_n) \\ \mathrm{cov}(X_2,X_1) & \sigma_2^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(X_n,X_1) & & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{X_1X_2}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{X_1X_n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{X_2X_1}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{X_nX_1}\sigma_n\sigma_1 & & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

e Σ é matriz simétrica ($\Sigma = \Sigma'$) e semidefinida positiva ($x'\Sigma x \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$).

DEFINIÇÃO: O vetor Z de v.a.'s de dimensão n acima é CONJUNTAMENTE GAUSSIANO ou CONJUNTAMENTE NORMAL se a densidade de probabilidade conjunta tem a forma:

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-\bar{z})'\Sigma^{-1}(z-\bar{z})\right)$$

com matriz Σ não singular, $|\Sigma| = \det(\Sigma)$.

• Caso particular: as v.a.'s X_i's são não-correlatadas $\Longleftrightarrow$ $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$ para todo $i \neq j$. Neste caso, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ e

$$\begin{aligned} p_Z(z) =& \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \sigma_1^2 \sigma_n^2 \cdots \sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{\sigma_i^2}\right) \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}\sqrt{2\pi\sigma_2^2}\cdots\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \cdots \exp\left(-\frac{(x_n - \bar{x}_n)^2}{2\sigma_n^2}\right) \\ =& p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) \cdots p_{X_n}(x_n) \end{aligned}$$

RESULTADO: Se uma família de v.a.'s gaussianas são não correlatadas $\Longrightarrow$ elas são independentes entre si.

FUNÇÃO CARACTERÍSTICA DE UM VETOR DE V.A.'S: é definida como

$$\begin{aligned} \Phi_Z(u) := E[\mathbf{e}^{j\, u'Z>}] &= \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{j\, u'y} p_Z(y)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [1 + ju'y + \frac{(ju'y)^2}{2!} + \cdots] p_Z(y)\, dy \end{aligned}$$

para $u = (u_1 u_2 \cdots u_n)'$.

Como função geradora de momentos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_Z}{\partial u_i}\Big|_{u=(u_1 u_2 \cdots u_n)=0} =& j\int_{-\infty}^{\infty} r p_{X_i}(x)\, dr = jE[X_i] = j\bar{x}_i,\ i = 1, \ldots, n \\ \frac{\partial^2 \Phi_Z}{\partial u_i \partial u_k}\Big|_{u=(u_1 u_2 \cdots u_n)=0} =& -\iint_{-\infty}^{\infty} rs p_{X_i X_k}(r,s)\, dr\, ds = -E[X_i X_k'] \\ & i,k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

• Função Característica para um vetor de v.a.'s conjuntamente gaussiano:

$$\Phi_Z(u) = \exp\big(ju'\bar{z} - \frac{1}{2}u'\Sigma u\big)$$

1. Valor médio

$$E[Z] = \frac{1}{j}\frac{\partial \Phi_Z}{\partial u}\Big|_{u=0}$$
$$= \frac{1}{j}\exp(ju'\bar{z} - \frac{1}{2}u'\Sigma u)(j\bar{z} - \Sigma u)\big|_{u=0} = \bar{z}$$

2. Segundo Momento

$$E[ZZ'] = -\frac{\partial^2 \Phi_Z}{\partial u^2}\Big|_{u=0}$$
$$= [(j\bar{z} - \Sigma u)\exp(ju'\bar{z} - \frac{1}{2}u'\Sigma u)(j\bar{z} - \Sigma u)'$$
$$- \Sigma\exp(ju'\bar{z} - \frac{1}{2}u'\Sigma u)]\big|_{u=0}$$
$$= \bar{z}\bar{z}' + \Sigma$$

e note que

$$E[(Z - \bar{z})(Z - \bar{z})'] = \bar{z}\bar{z}' + \Sigma - \bar{z}\bar{z}' = \Sigma$$

Então confirma-se que $\bar{z}$ é a média e Σ covariância do vetor Z.

3. Notação: $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$. Com isso,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Resumo de propriedades:

(a) $|\sigma_{ij}| \leq \sigma_i\sigma_j, \quad \forall i, j$

(b) $|\Sigma| \neq 0$, Σ é matriz definida positiva e Σ^{-1} existe se as v.a.'s $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ forem linearmente independentes:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \iff a_i = 0, \quad \forall i$$

isto é equivalente a exigir que os coeficientes de correlação $|\rho_{ij}| < 1$ (mostre isso!).

(c) Se Σ é matriz diagonal, $\sigma_{ij} = 0$ e as variáveis aleatórias X_i são não correlacionadas. Como são V.A.'S GAUSSIANAS $\Longrightarrow X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ são independentes entre si.

4. Seja $Z \sim N(\bar{z}, \Sigma_z)$, um vetor de v.a.'s gaussianas, e defina $Y = AZ$ para alguma matriz A.

   Então a função característica é

$$\begin{aligned}\Phi_Y(u) =& E[\exp^{ju'Y}] = E[\exp^{ju'AZ}] = \Phi_Z(\tilde{u} = A'u) \\ &= \exp(j\tilde{u}'\bar{z} - \frac{1}{2}\tilde{u}'\Sigma_z\tilde{u}) = \exp(ju'A\bar{z} - \frac{1}{2}u'A\Sigma_z A'u)\end{aligned}$$

   isto é, $y \sim N(A\bar{z}, A\Sigma_z A')$. Se $Y = AZ + b$ para alguma matriz A e vetor b, é evidente que $y \sim N(A\bar{z} + b, A\Sigma_z A')$ (mostre!).

5. Sejam X e Y dois vetores gaussianos, então $X + Y$ é gaussiano.

   Escolher $A = [I_n \,\vdots\, I_n]$ e $z = \begin{bmatrix} x \\ \cdots \\ y \end{bmatrix}$ e utilizar o resultado em 4.

6. Se dois vetores gaussianos X e Y são não correlacionados, isto é $\sigma_{X_iY_j} = 0, \forall i, j$ ($\equiv \sigma_{Y_iX_j} = 0, \forall i, j$), então eles são independentes

   Seja $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ e $z = \begin{bmatrix} x \\ \cdots \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r=n+m}$. Então,

$$p_{X,Y}(x,y) = p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^r |\Sigma_z|}} \exp^{-\frac{1}{2}(z-\bar{z})'\Sigma_z^{-1}(z-\bar{z})}$$

   E neste caso,

$$\Sigma_z = \begin{bmatrix} \Sigma_x & 0 \\ 0 & \Sigma_y \end{bmatrix} \rightarrow \Sigma_z^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_x^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_y^{-1} \end{bmatrix}, \; |\Sigma_z| = |\Sigma_x||\Sigma_y|$$

Assim,

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma_x|}}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m|\Sigma_y|}}\cdot$$
$$\exp(-\frac{1}{2}(x-\bar{x})'\Sigma_x^{-1}(x-\bar{x}))\exp(-\frac{1}{2}(y-\bar{y})'\Sigma_y^{-1}(y-\bar{y}))$$
$$= p_X(x)p_Y(y)$$

□

7. DENSIDADE CONDICIONAL DE VETORES GAUSSIANOS Considere X e Y dois vetores de v.a.'s gaussianas. A DENSIDADE CONDICIONAL $p_X(x|Y=y_0)$ (ou $p_Y(y|X=x_0)$) é também gaussiana.

Para verificar essa propriedade, escrevemos $p_X(x|Y=y_0) = p_X(x|y_0)$, e considere

$$p_X(x|y_0) = \frac{p_{X,Y}(x,y_0)}{p(y_0)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\frac{|\Sigma_z|}{|\Sigma_y|}}}\cdot\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(z-\bar{z})'\Sigma_z^{-1}(z-\bar{z})\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}(y_0-\bar{y})'\Sigma_y^{-1}(y_0-\bar{y})\right)}$$

onde tomamos $z = \begin{bmatrix} y \\ \cdots \\ x \end{bmatrix}$. Supomos também que a matriz de covariâncias Σ_z é matriz definida positiva.

Para uma matriz inversível A qualquer dividida em blocos: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ onde tomamos A_{11} e A_{22} como matrizes quadradas de dimensões quaisquer, podemos expressar a inversa de A em termos dos blocos como

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} (A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ -(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & (A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$

Utilizando essas relações, junto com o fato que Σ_z é matriz simétrica, e portanto $\Sigma_{xy} = \Sigma'_{yx}$, podemos avaliar:

$$\Sigma_z^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_y & \Sigma_{yx} \\ \Sigma'_{yx} & \Sigma_x \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} (\Sigma_y-\Sigma_{yx}\Sigma_x^{-1}\Sigma'_{yx})^{-1} & -\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx}(\Sigma_x-\Sigma'_{yx}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1} \\ -(\Sigma_x-\Sigma'_{yx}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1}\Sigma'_{yx}\Sigma_y^{-1} & (\Sigma_x-\Sigma'_{yx}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1} \end{bmatrix}$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
(z-\bar{z})'\Sigma_z^{-1}(z-\bar{z}) = (x-\bar{x})'(\Sigma_x - \Sigma_{yx}'\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1}(x-\bar{x})' \\
-(x-\bar{x})'(\Sigma_x - \Sigma_{yx}'\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1}\Sigma_{yx}'\Sigma_y^{-1}(y_0-\bar{y}) \\
-(y_0-\bar{y})'\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx}(\Sigma_x - \Sigma_{yx}'\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1}(x-\bar{x}) \\
+(y_0-\bar{y})'(\Sigma_y - \Sigma_{yx}\Sigma_x^{-1}\Sigma_{yx}')^{-1}(y_0-\bar{y}) = \\
= [(x-\bar{x}) - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}(y_0-\bar{y})]'(\Sigma_x - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1}[(x-\bar{x}) - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}(y_0-\bar{y})] + \\
+(y_0-\bar{y})'(\Sigma_y - \Sigma_{yx}\Sigma_x^{-1}\Sigma_{yx}')^{-1}(y_0-\bar{y}) \\
-(y_0-\bar{y})'\Sigma_y^{-1}\Sigma_{xy}'(\Sigma_x - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1}\Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}(y_0-\bar{y})
\end{aligned}
$$

como os últimos dois têrmos acima só involvem y_0 e $\bar{y}$ que são constantes, podemos finalmente escrever:

$$p_X(x|y_0) = \text{cte}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}[x-\bar{x}-\Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}(y-\bar{y})]'(\Sigma_x - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx})^{-1}[x-\bar{x}-\Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}(y-\bar{y})]\right)$$

É evidente que essa distribuição é gaussina pois em se tratando de distribuição a constante não avaliada deve ser tal que

$$\int\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x|y_0)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 1$$

além disso, denotando,

$$\mu = \bar{x} + \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}(y-\bar{y}), \quad \Lambda = \Sigma_x - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx}$$

então, $p_X(x|y_0) = \text{cte}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}[x-\mu]'\Lambda^{-1}[x-\mu]\right)$ é evidentemente gaussiana já que $\Lambda = \Lambda'$ e Λ é matriz definida positiva. □

8. Como conseqüência do item anterior, temos que a média condicional e a variância condicional do vetor X são dadas respectivamente por:

$$E[X|Y=y_0] = \bar{x} + \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}(y_0-\bar{y})$$
$$E[(X-\bar{x})^2|Y=y_0] = \Sigma_x - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{yx} \stackrel{\triangle}{=} \Sigma_{x|y}$$

   Note que a variância condicional não depende do valor específico da observação $Y=y_0$ da v.a, e que $\Sigma_{x|y} \leq \Sigma_x$ no sentido de matrizes semipositiva definida.

9. Momentos de ordem superior:

$$E[z] = \bar{z}$$
$$E[(z-\bar{z})^2] = \sigma_z^2$$
$$E[(z-\bar{z})^{2k+1}] = 0$$
$$E[(z-\bar{z})^{2k}] = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)\sigma_z^{2k}$$

EXERCÍCIOS

1. (a) Se $A \bigcap B = \emptyset$, pode-se concluir algo sobre a independência de A e B?
   (b) Mostre que um evento de probabilidade nula ou de probabilidade 1 é independente de outro evento qualquer.

2. Feita uma pesquisa com alunos(as) da Unicamp, descobriu-se que 85% dos alunos do sexo masculino (sm) e 92% do sexo feminino (sf) gostam de ir ao cinema. Destes, descobriu-se que as preferências se distribuem pelos gêneros investigados da seguinte forma:

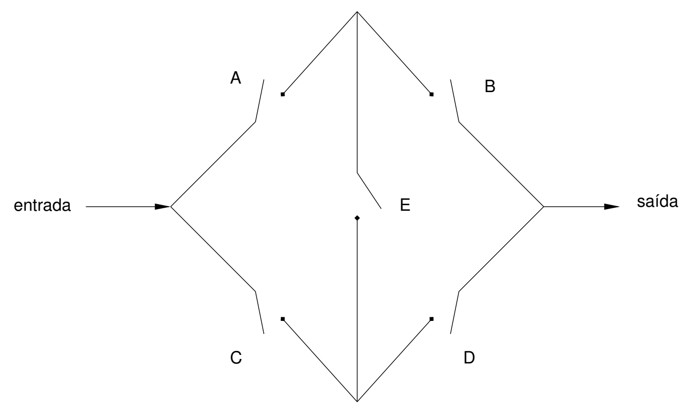
gênero	sm	sf
aventura:	85%	60%
romance:	45%	97%
terror:	20%	12%

   Suponha que as populações masculinas e femininas sejam de mesmo tamanho, já subtraindo você mesmo.

   (a) Qual é a probabilidade que a sua colega Elizelda goste de filmes de romance?
   (b) Qual é a probabilidade que o 1o. estudante que passe por você seja uma aluna que goste de filmes de aventura?
   (c) Qual é a probabilidade que seu colega José goste de filmes de aventura e de terror, sendo que o total de estudantes do sm que gostam de cinema de aventura ou de terror totalizam 100%?

3. (probabilidade total) Suponha que a ocorrência ou não de chuva dependa das condições do tempo no dia imediatamente anterior. Admita-se que se chove hoje, choverá amanhã com probabilidade 0,7 e que se não chover hoje, choverá amanhã com probabilidade 0,4. Sabendo-se que choveu hoje, calcule a probabilidade de que choverá depois de amanhã.

4. (probabilidade total) Numa rede com chaves como na figura abaixo, as chaves operam independentemente, fechando-se com probabilidade p e mantendo-se abertas com probabilidade $1 - p$.

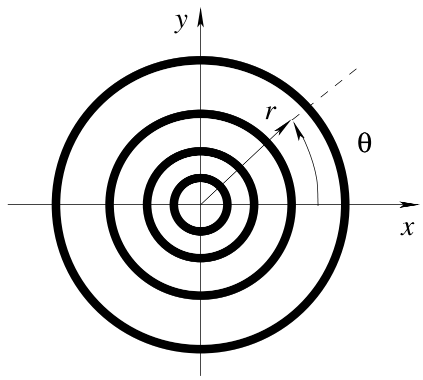


   (a) Encontre a probabilidade que um sinal aplicado na entrada será recebido na saída;

   (b) Encontre a probabilidade condicional que a chave E está aberta, dado que o sinal foi recebido.

5. Jogo de Dardos. Considere

$$\left.\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) \\ p_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2}) \end{aligned}\right\} \quad X \text{ e } Y \text{ independentes}$$



   (a) Determine $p_{R,\Theta}(r,\theta)$. Mostre que R e Θ são independentes entre si.

   (b) Faça um programa Matlab que simule os lançamentos de dardos, *utilizando somente a rotina* `rand` para gerar valores aleatórios. Para construir a figura de um alvo utilize o seguinte código:

```
 % constroi o alvo com 20 cm de raio
clf, clear all
theta=(0:.01:2*pi)';
polar(theta,20*ones(size(theta)),':k')
hold on
```

6. (esperança condicional) Considere que um certo número de mensagens são geradas em um nó de comunicação, à uma taxa média ν por unidade de tempo, apresentando variância σ_ν^2 nesse número. Cada mensagem possui um número médio de η bits e a variância do número de bits por mensagem é σ_η^2. Elas são enviadas através um canal, e deseja-se conhecer o número médio e a variância de bits que deverão trafegar pelo canal de comunicação por unidade de tempo.

7. (distribuição condicional de v.a. gaussiana) Considere novamente o problema do jogo de dardos supondo agora um modelo mais elaborado para os

lançamentos. As coordenadas X e Y são duas v.a.'s gaussianas $X \sim N(0, \sigma_x^2)$ e $Y \sim N(0, \sigma_y^2)$, e elas são dependentes entre si, com $\mathrm{cov}(X,Y) = \sigma_{xy}$. Calcule a distribuição conjunta nas coordenadas ortogonais. Supondo que ao lançar-se um dardo se conheça a abcissa $Y(\omega) = 1$cm determine:

(a) a distribuição condicional de X,

(b) a média condicional de X,

(c) a variância condicional de X.

(d) Sabendo que a mosca do alvo tem 3 cm de diâmetro, indique a probabilidade de se ter atingido a mosca. Utilize a função $\mathrm{Erf}(x)$ para dar esse resultado.