6. MODELAGEM E IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

6.1 MODELOS NÃO-LINEARES

A utilização de técnicas de controle baseadas em modelos lineares é, em parte, devido à simplicidade dos modelos empregados para representar o comportamento do processo, no entanto, isto também constitui uma deficiência potencial porque tais modelos lineares são, muitas vezes, inadequados quando se faz necessária uma melhor aproximação de um processo. Por outro lado, os esquemas de controle não-linear, os quais empregam modelos mais realistas e, portanto, mais complexos, para a descrição de processos não-lineares, eliminam a simplicidade associada às técnicas lineares. Modelos não-lineares possibilitam um "retrato" mais fiel do processo quando este se faz necessário. Apesar de apresentar uma complexidade maior, apenas a representação através de um modelo não-linear permite a análise de algumas características do sistema como oscilações e bifurcações .

6.1.1 Modelo NCARMA (Nonlinear Controlled Auto-Regressive Moving Average)

Este modelo, que na literatura aparece comumente como NARMAX (Nonlinear Auto-Regressive Moving Average Model with Exogenous Inputs), representa o sistema através de uma função polinomial com grau de não-linearidade ℓ cuja parcela determinística é apresentada como o somatório de termos com graus de não-linearidade m ($1 \le m \le \ell$). Cada termo de grau m pode conter um fator de grau p do tipo y(t - i) e um fator de grau (m - p) do tipo u(t - i) multiplicados por um parâmetro $h_{p,m-p}(n_1, ..., n_m)$, ou seja,

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{m} \sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} h_{p, m-p} \left(n_1, \dots, n_m \right) \prod_{i=1}^{p} y(t-n_i) \prod_{i=p+1}^{m} u(t-n_i)$$
(6.1)

onde $\sum_{n_1,n_m}^{n_y,n_u} \equiv \sum_{n_1=1}^{n_y} \cdots \sum_{n_m=1}^{n_u}$, podendo ainda ser representado na forma

$$y(t) = h_0 + \sum_{n_1=1}^{n_y} h_{1,0}(n_1) y(t-n_1) + \sum_{n_1=1}^{n_u} h_{0,1}(n_1) u(t-n_1) + \sum_{n_1=1}^{n_y} \sum_{n_2=n_1}^{n_y} h_{2,0}(n_1,n_2) y(t-n_1) y(t-n_2) + \sum_{n_1=1}^{n_y} \sum_{n_2=n_1}^{n_y} h_{1,1}(n_1,n_2) y(t-n_1) u(t-n_2) + \sum_{n_1=1}^{n_y} \sum_{n_2=n_1}^{n_y} h_{0,2}(n_1,n_2) u(t-n_1) u(t-n_2) + \dots$$
(6.2)

Exemplo 6.1 - A equação (6.3) representa um modelo *NCARMA* com $n_y = 2$, $n_u = 2$, e m = 3, usado para descrever um aquecedor elétrico obtido experimentalmente, conforme Aguirre (2000).

$$y(t) = 0.4455y(t-1) + 0.5777y(t-2) + 0.4860u(t-1) - 0.6363u(t-2) -1.1458.10^{-6}y^{2}(t-1)u(t-1) - 9.9776.10^{-5}u^{2}(t-1)u(t-3) -2.9271.10^{-5}y^{3}(t-3) + 7.8831.10^{-3}y(t-2)u(t-2) +7.4386.10^{-8}y^{2}(t-3)u(t-3)$$
(6.3)

O modelo *NCARMA* apresenta-se como o caso mais geral de representação de sistemas não-lineares, cujos casos particulares podem representar os modelos de Volterra e Bilinear dentre outros.

6.1.2 Modelo de Volterra

A representação de um sistema não-linear através de uma série de Volterra pode ser vista como uma generalização da representação de resposta impulsiva para sistemas lineares, que no seu caso discreto é dada por

$$y(t) = h_0 + \sum_{i=1}^{\infty} h_{1i}u(t-d-i) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} h_{2ij}u(t-d-i)u(t-d-j) + \dots + \sum_{i=1}^{\infty} \dots \sum_{j=i}^{\infty} h_{mi...}u(t-d-i)\dots u(t-d-...) + \mathcal{E}(t)$$
(6.4)

No caso particular de um sistema linear a equação (6.4) fica reduzida ao modelo da resposta impulsiva, equação (6.5). Para viabilizar a aplicação prática deste modelo utilizase uma série de Volterra truncada numa ordem desejada e com memória finita, isto é,

$$y(t) = h_0 + \sum_{i=1}^{N} h_{1i}u(t-d-i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i}^{N} h_{2ij}u(t-d-i)u(t-d-j) + \dots + \sum_{i=1}^{N} \dots \sum_{j=i}^{N} h_{mi...}u(t-d-i)\dots u(t-d-...) + \varepsilon(t)$$
(6.5)

onde os parâmetros h_0 , h_{1i} e h_{2ij} são coeficientes do modelo, N representa a memória e o número de parcelas está relacionado, também, à ordem m do modelo. O modelo de Volterra pode ser visto como um caso particular do *NCARMA* onde todas as parcelas h_{ij} associadas à saída são nulas. O número de termos do modelo pode ser representado pela seguinte expressão:

$$N^{\circ} termos = \frac{(N+m)! - N!}{m!}$$
(6.6)

A modelagem do processo utilizando apenas informação da entrada pode necessitar um número elevado de parâmetros para o modelo de Volterra Uma alternativa a esta representação é desenvolver o kernel utilizando funções ortornormais.

Exemplo 6.2 - A equação (6.7) representa um modelo de Volterra, com N = 6 e m = 2, usado para descrever um processo *Fan and Plate* em escala de laboratório.

$$y(t) = 0.0700 - 0.1505u(t-1) - 1.2058u(t-2) + 0.1174u(t-3) + 0.1600u(t-4) -0.1168u(t-5) + 0.0320u(t-6) + \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} h_{2ij}u(t-i)u(t-j)$$
(6.7)

onde

	+0.0714	+0.2362	-0.0510	-0.0904	-0.0780	-0.0885
	0	+0.2701	-0.0171	-0.0566	-0.0442	-0.0546
h _	0	0	+0.0723	+0.0329	+0.0453	+0.0348
$n_{2ij} =$	0	0	0	+0.0437	+0.0561	+0.0456
	0	0	0	0	+0.0420	+0.0315
	0	0	0	0	0	+0.0281

A representação de processos não-lineares através de séries de Volterra possibilita a descrição de dinâmicas assimétricas e variações no sinal do ganho do processo possuindo várias aplicações bem sucedidas em controle de processos em telecomunicações, processos químicos, sistemas biológicos, eletrônica, forno de gesso, controle de pressão.

6.1.3 Modelo Bilinear

O modelo bilinear é baseado em um modelo linear do tipo *ARMA* mais termos nãolineares constituídos pelos produtos entre entradas e saídas na equação:

$$A(q^{-1})y(t) = b_0 + B_1(q^{-1})u(t-d) + \sum_{i=0}^{ny} \sum_{j=0}^{nu} b_{2ij}y(t-d-i)u(t-d-j) + \dots + \mathcal{E}(t)$$
(6.8)

onde os termos do polinômio b_{2ij} são coeficientes não-lineares, *ny* e *nu* representam o grau de não-linearidade. Também pode ser visto como um caso particular do *NCARMA* onde apenas os parâmetros associados à entrada e aos termos cruzados de segunda ordem são diferentes de zero.

Exemplo 6.3 - A equação (6.9) representa um modelo Bilinear, com ny = 3 e nu = 1, usado para descrever o mesmo processo *Fan and Plate* do exemplo 2.2.

$$y(t) = 1.2515y(t-1) - 0.5607y(t-2) - 0.3267y(t-3) - 0.1243u(t-1) + 0.3829u(t-2) + 0.3026y(t-1)u(t-1) - 0.3314y(t-1)u(t-2) - 0.4992y(t-2)u(t-1) + 0.5181y(t-2)u(t-2) + 0.2347y(t-3)u(t-1) - 0.1264y(t-3)u(t-2)$$
(6.9)

A aplicação de um modelo bilinear na representação de um processo industrial está associada às plantas cujas características são inerentemente bilineares como processos de fermentação, colunas de destilação, reatores nucleares e reatores químicos. Como a

estrutura do modelo bilinear é linear em relação aos parâmetros é possível aplicar as mesmas técnicas de identificação empregadas nos modelos lineares.

6.1.4 Modelo de Hammerstein

Este modelo consiste de um elemento estático não-linear seguido por um sistema dinâmico linear como ilustrado na Figura 6.1.



Figura 6.1 – Modelo de Hammerstein.

O bloco da não-linearidade estática (*NL*) pode ser representado por um polinômio, pela equação da não-linearidade ou através de modelos semi-paramétricos.

▶ Representação da NL por um Polinômio

Este caso é o mais comum quando não se dispõe de informações a respeito da natureza da não-linearidade, aproximado-a por uma expansão polinomial finita do tipo

$$x(t) = \gamma_{1}u(t) + \gamma_{2}u^{2}(t) + \dots + \gamma_{m}u^{m}(t)$$
(6.10)

onde *t* é o instante de tempo, x(t) é a pseudo-saída, não-mensurável, do bloco não-linear, u(t) é a variável de entrada, γ_t (*i* = 1, ..., *m*) representam os coeficientes do polinômio e *m* é o grau de não-linearidade do modelo.

Normalmente considera-se $\gamma = 1$ transferindo o ganho estático para a parcela dinâmica linear, $G(q^{-1})$, que pode ser representada por qualquer um dos modelos lineares apresentados no capítulo 4.

O modelo de Hammerstein pode ser apresentado, ainda, como um caso particular do modelo de Volterra, equação (6.5), com $h_{ij} = 0$, $i \neq j$, tornando-se

$$y(t) = h_0 + \sum_{j=0}^{nu} b_{1j} u(t-d-j) + \sum_{j=0}^{nu} b_{2j} u^2(t-d-j) + \sum_{j=0}^{nu} b_{3j} u^3(t-d-j) + \dots + \mathcal{E}(t)$$
(6.11)

Exemplo 6.4 - A equação (6.12) representa um modelo de Hammerstein, com na = 1, nb = 2 e m = 3, usado para descrever um reator.

$$y(t) = 0.962 y(t-1) + 0.032u(t-1) + 0.085u(t-2) - 0.114u^{2}(t-1) + 0.061u^{2}(t-2) - 0.035u^{3}(t-1) + 0.031u^{3}(t-2)$$
(6.12)

6.1.5 Modelo de Wiener

Este modelo apresenta um sistema dinâmico linear seguido por um elemento nãolinear, de forma contrária ao modelo de Hammerstein, como ilustrado na abaixo.



Figura 6.2 – Modelo de Wiener.

Da mesma forma que o caso de Hammerstein, a parcela linear pode ser representada por um dos modelos apresentados no capítulo 4, enquanto que a nãolinearidade (*NL*) pode ser representada por um polinômio do tipo

$$y(t) = \gamma_1 w(t) + \gamma_2 w^2(t) + \dots + \gamma_m w^m(t)$$
(6.13)

onde w(t) é a pseudo-saída do bloco linear ou, ainda, baseada nas outras formas de representação válidas para o modelo de Hammerstein visto que o modelo de Wiener é considerado o seu dual.

▶ Representação pelo Mapeamento Estático da NL

Este caso é aplicado quando a não-linearidade envolvida apresenta uma estrutura conhecida como saturação, zona-morta, histerese ou relé, dentre outras . A Figura 6.3 ilustra a representação de alguns tipos comuns de não-linearidades cujas equações aparecem representadas na

Tabela 6.1.



Figura 6.3 – Tipos Comuns de Não-Linearidades.

Não-Linearidade	Equação			
Saturação	$x(t) = \frac{1 + \operatorname{sgn}(a - u(t))}{2}u(t) + \frac{1 + \operatorname{sgn}(u(t) - a)}{2}a.\operatorname{sgn}(u(t))$			
Zona-morta	$x(t) = u(t) - a.\operatorname{sgn}\left(u(t)\right) - \frac{1 + \operatorname{sgn}\left(a - u(t) \right)}{2} \left[u(t) - a.\operatorname{sgn}\left(u(t)\right)\right]$			
Histerese	$x(t) = \frac{\operatorname{sgn}(u(t) - a) + \operatorname{sgn}(u(t) + a)}{2}$			
Relé	$x(t) = \begin{cases} u(t) - a & \text{se} & u(t) > u(t-1), \\ u(t) + a & \text{se} & u(t) < u(t-1), \\ x(t-1) & \text{se} & u(t) = u(t-1) \end{cases}$			

Tabela 6.1 – Representação de NL com Estrutura Conhecida.

onde "sgn" representa a função sinal.

▶ Representação da NL por um Modelo Semi-paramétrico

Esta terminologia é utilizada para descrever uma classe de modelos baseada em redes neurais artificiais (*ANN – Artificial Neural Networks*) e informação lingüística difusa. Nestes casos os modelos são formados por números que correspondem às ponderações de uma *ANN* ou ao grau de pertinência num conjunto difuso.

 Modelos ANN – Estes modelos têm a capacidade de "aprender" o comportamento entrada-saída do sistema. Uma rede neural consiste de vários elementos computacionais simples, denominados de nós, arranjados em camadas e operando em paralelo (Figura 6.4). Os pesos das conexões entre os nós são adaptados durante a operação de treinamento da rede que tem por objetivo melhorar o seu desempenho.



Figura 6.4 – Estrutura de um modelo Hammerstein Neural.

 Modelos Nebulosos (*fuzzy models*) – este modelo combina informação numérica e lingüística (do tipo pequeno, médio, grande, etc.) possibilitando a aplicação do conhecimento prévio das características do processo mesmo que este seja incompleto e/ou com incertezas.



Figura 6.5 – Estrutura de um modelo Hammerstein Nebuloso.

A popularidade do modelo de Hammerstein deve-se ao fato da maior simplicidade em relação às representações de Volterra e Bilinear aliada a uma capacidade de representação da não-linearidade da maioria dos processos práticos sendo capaz de representar processos com atuadores não-lineares e ganhos variantes.

Exemplo 6.5 - As equações (6.14) e (6.15) representam um modelo de Wiener, com na = 2, nb = 1 e m = 3, utilizado em Chiras (2002) para representar o comportamento de uma turbina a gás.

$$y(t) = 5.46w(t) + 0.167w^{2}(t) + 0.0669w^{3}(t)$$
(6.14)

onde

$$w(t) = 0.9993w(t-1) - 0.0373w(t-2) + 0.0043u(t-1) - 0.00028u(t-2)$$
(6.15)

O modelo de Wiener conta com diversas aplicações registradas na literatura de controle de processos como na representação do comportamento muscular sob anestesia, controle de pH, colunas de destilação, controle de válvulas ,turbina a gás, reatores químicos), além de qualquer processo do **Tipo Wiener**, ou seja, que possa ser representado por uma parcela dinâmica linear seguida de uma não-linearidade estática.

6.2 RELAÇÃO ENTRE OS MODELOS

Os diversos modelos apresentados nas seções anteriores podem ser relacionados conforme descrito a seguir:



Figura 6.6 – Relação entre os modelos não-lineares.

Como a complexidade dos modelos estudados está diretamente relacionada ao número de termos envolvidos, a Tabela 6.2 apresenta uma comparação levando em conta o caso não-paramétrico na representação do modelo linear.

Modelo	Número de Termos	
Linear	Ν	
Hammerstein / Wiener	N + m	
Bilinear	N + ny.nu	
Volterra	$\frac{(N+m)! - N!}{m!}$	
NCARMA	$\frac{(N+ny+m)!}{(N+ny)!} m!$	

Tabela 6.2 – Comparação da Complexidade dos Modelos.

Embora os modelos de Volterra e *NCARMA* possam apresentar um número bastante elevado de termos é comum a aplicação de técnicas de redução de modelo ao longo do procedimento de identificação visando empregar apenas aqueles termos que sejam mais relevantes em relação às características de interesse do processo (Aguirre, 2000).

6.3 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

A identificação de sistemas busca a representação do comportamento de um processo através de um modelo matemático independente do conhecimento prévio a respeito do mesmo. Um procedimento de identificação pode ser dividido em várias etapas dentre as quais se destacam: tratamento das medidas, seleção do modelo, determinação da estrutura, estimação dos parâmetros, validação do modelo como ilustrado na Figura 6.7.



Figura 6.7 – Diagrama do Protocolo de Identificação.

O sinal empregado na identificação do sistema deve ser capaz de excitá-lo em toda a faixa de interesse pois, caso contrário, estas características não são registradas e, portanto, o modelo identificado não é capaz de representá-las. Sinais de entrada com excitação persistente possibilitam um melhor condicionamento numérico nos problemas de estimação que aplicam a técnica dos mínimos.

Enquanto que na identificação de sistemas lineares a característica do sinal de entrada mais importante é o conteúdo de freqüências no seu espectro, para sistemas não-

lineares destaca-se também a amplitude do sinal que deve ser capaz de fazer o sistema operar em toda a faixa de operação de interesse fazendo-o revelar as suas características não-lineares. Na prática, sinais do tipo **ruído branco** (sinal aleatório cujo espectro tem potência em todas as freqüências) e *PRBS* (*Pseudo-Random Binary Signal*) são comumente utilizados tanto na identificação de processos lineares como não-lineares (Aguirre,2000).

A literatura apresenta diversas técnicas de identificação para sistemas lineares, representados por equações a diferenças, sendo as mais populares aquelas baseadas no algoritmo dos mínimos quadrados (MQ).

6.4 Seleção do Modelo

Os modelos matemáticos mais comuns para a representação de um processo dinâmico estão apresentados no capítulo 2 e cada um possui características distintas que devem ser levadas em conta na seleção. Para escolher o modelo mais adequado para uma aplicação particular deve-se considerar sua capacidade de representar as características da planta sem, no entanto, desconsiderar que a simplicidade do modelo está diretamente relacionada ao esforço computacional envolvido sendo, portanto, um fator fundamental para uma implementação em tempo-real. Na prática, o modelo escolhido é, em geral, o mais simples possível capaz de atender aos requisitos operacionais estabelecendo um compromisso entre capacidade de aproximação x simplicidade de representação.

A Figura 6.8 apresenta um diagrama que pode ser usado como uma ferramenta na seleção de um modelo a ser empregado na representação de um processo não-linear.



Figura 6.8 – Diagrama para Seleção de Modelo.

6.4.1 Detecção de Não-Linearidade

Uma etapa fundamental na determinação da necessidade de uso de um modelo nãolinear na representação da planta é a detecção da não-linearidade (*NL*) do processo. Um sistema não-linear apresenta uma não-linearidade que pode ser classificada como **fraca**, **média** ou **forte** e um dos seguintes tipos de comportamento apresentados na Tabela 6.3.

Tipo de NL	Comportamento	Descrição		
	Resposta Assimétrica	Característica da resposta dependente da entrada violando o Princípio da Superposição dos Efeitos.		
Fraca	Geração de Harmônicas	O sistema sujeito a uma entrada senoidal produz uma saída não senoidal de mesma freqüência.		
	Multiplicidade de Entrada	Uma saída corresponde a mais de uma entrada em regime permanente.		
Média	Estabilidade Dependente da Entrada	A estabilidade do sistema depende da amplitude da entrada aplicada.		
	Multiplicidade de Saída	Uma entrada leva a mais de uma saída em regime permanente.		
Forte	Geração de Sub-harmônicas	O sistema sujeito a uma entrada senoidal produz uma saída não senoidal de freqüência menor que a entrada.		
	Comportamento Caótico	O sistema apresenta respostas altamente irregulares para entradas simples.		

Tabela 6.3 –	Comportamento	Não-Linear.
--------------	---------------	-------------

Alguns testes comuns permitem a observação de um comportamento não-linear auxiliando, portanto, na decisão de optar-se por este tipo de representação na seleção de um modelo.

Simetria e Dependência de Amplitude da Entrada

Estes testes permitem confrontar os comportamentos linear x não-linear cobrindo a maioria dos processos não-lineares.

• **Teste de Simetria** – representa o mais comum dos testes de não-linearidade, consiste na aplicação de entradas simétricas ao sistema e a conseqüente observação da saída.

Exemplo 6.6 - O comportamento do sistema representado pela equação (6.16) é ilustrado pela Figura 6.9 com a aplicação de degraus de entrada com valores u(t) = +3; +1; -1 e -3.

$$y(t) = 0.8y(t-1) - 0.3y(t-1)sen(y(t-1)) + u(t-1)$$
(6.16)



Figura 6.9 – Teste de Simetria.

O comportamento do sistema, ilustrado na Figura 6.9, apresenta-se bastante assimétrico em relação às entradas aplicadas caracterizando de forma bastante acentuada este tipo de não-linearidade. Embora seja um teste bastante popular a característica de simetria é uma condição apenas necessária para indicar a linearidade de um sistema, ou seja, mesmo um sistema não-linear pode apresentar um comportamento simétrico dentro de uma faixa de operação restrita e, neste caso, outros testes se fazem necessários.

 Teste de Dependência de Amplitude – consiste na aplicação de entradas em degraus de amplitudes crescentes e a observação da saída. Características dinâmicas e até de estabilidade de um sistema não-linear podem ser dependentes da amplitude da entrada aplicada.

Exemplo 6.7 - A Figura 6.10 ilustra o comportamento de um sistema representado pela equação (6.17) sujeita à aplicação de degraus de entrada com valores u(t) = 4.2k, k = 1 a 5.

$$y(t) = -0.8y(t-1) + 0.2y^{2}(t-1) + 0.2u(t-1)$$
(6.17)



Figura 6.10 – Teste de Dependência de Amplitude da Entrada.

Observa-se que o comportamento dinâmico do sistema varia em função da amplitude do sinal de entrada e, a partir da entrada u(t) = 21, torna-se instável.

Entradas Periódicas

Através de uma análise do comportamento do sistema sujeito a uma entrada periódica é possível observar comportamentos não-lineares do tipo geração de harmônicas ou sub-harmônicas.

Exemplo 6.8 - A equação (6.18) representa um sistema com uma não-linearidade do tipo seno na entrada

$$y(t) = 0.9 y(t-1) + 0.1 sen(2\pi u(t-1))$$
(6.18)

e a Figura 6.11 representa a relação entrada x saída para este sistema onde a entrada é um sinal senoidal e a saída é um sinal não-senoidal de mesma freqüência que a entrada caracterizando um comportamento não-linear com geração de harmônicas.



Figura 6.11 – Teste de Entradas Periódicas.

Os modelos de Wiener e Hammerstein/ mostram-se adequados na representação das não-linearidades descritas como fracas na Tabela 6.3, pois são capazes de reproduzir os comportamentos característicos deste tipo de não-linearidade.

Embora a análise do comportamento do processo indique a necessidade de utilização de um modelo não-linear, restrições do ponto de vista da aplicação em temporeal podem conduzir o usuário para outras soluções como, por exemplo, o emprego de múltiplos modelos lineares levando em conta faixas de operação mais restritas ou, ainda, o uso de um único modelo linear pode ser suficiente para aplicações em controle de processos quando é empregado algum tipo de estratégia adaptativa.

6.5 SELEÇÃO DE ESTRUTURA

Existem diversos critérios para a seleção de ordem de modelos lineares monovariáveis como aqueles baseados na razão entre determinantes, critério de informação de Akaike (*AIC – Akaike's Information Criterion*), critério do erro de predição final (*FPE – Final Prediction Criterion*). No entanto, quando o sistema é não-linear são poucas as ferramentas para auxiliar nesta etapa. Aguirre (2000) propõe a aplicação da taxa de redução do erro, *ERR (Error Reduction Ratio*), aplicadas a modelos *NCARMA*. Esta estratégia permite a detecção de quais parcelas do modelo são mais relevantes para serem incluídas e quais podem ser consideradas desprezíveis.

OBS:

Este texto foi compilado utilizando parte dos capítulos 2 e 3 da Tese de Doutorado de Jose Eli Santos dos Santos .

A tese está no endereço: http://www.das.ufsc.br/~santos/Tese/