

# Sumário

<b>2</b>	<b>Métodos Não-paramétricos</b>	<b>3</b>
2.1	Introdução . . . . .	3
2.2	Métodos de identificação temporais . . . . .	5
2.2.1	Método da resposta ao degrau . . . . .	5
2.2.2	Método da convolução finita . . . . .	7
2.2.3	Método das correlações . . . . .	8
2.2.3.1	Aproximação ergódica e comparação com o método da seção 2.2.2 . . . . .	9
2.3	Métodos de identificação freqüenciais . . . . .	12
2.3.1	Método da varredura em freqüência . . . . .	12
2.3.1.1	Redução dos efeitos dos ruídos . . . . .	12
2.3.2	Método das densidades espectrais . . . . .	13
2.3.2.1	Densidades espectrais de potência e resposta em freqüência	14
2.3.2.2	Propriedades do estimador Periodograma . . . . .	15
2.3.2.3	Estimador Correlograma . . . . .	18
2.3.2.4	Comparação entre os métodos da varredura em freqüência e das densidades espectrais . . . . .	20
2.4	Estudo de Caso . . . . .	21
2.5	Comentários gerais . . . . .	23



## Capítulo 2

# Métodos Não-paramétricos

Texto Preliminar do capítulo de mesmo nome da “Enciclopédia de Controle”, a ser editada pela Sociedade Brasileira de Automática – SBA

Autores: João Bosco R. do Val e Amauri Lopes – UNICAMP, FEEC

Versão final V02 de 17 de abril de 2006

### 2.1 Introdução

Uma classificação importante dos métodos de identificação distingue-os em duas categorias básicas: os métodos paramétricos e os não-paramétricos. A princípio supõe-se que o sistema é linear, entretanto no primeiro caso conta-se com a adoção de uma família específica de modelos escolhida previamente, a partir da qual o procedimento de identificação reduz-se à obtenção do elemento na família que melhor represente o sistema original. Em outras palavras, a abordagem paramétrica aplica-se quando existem informações a priori sobre o sistema em estudo, tais como provenientes de leis físicas que o descrevam, ou relações de outra forma, que permitam distinguir a família específica de modelos mais adequada. A situação padrão é quando se sabe que o sistema em estudo é linear invariante no tempo e além disso, ele é descrito por um número de pólos e zeros conhecido. O problema de identificação reduz-se então à obtenção dos valores numéricos dos parâmetros que definem o elemento mais apropriado da família de modelos escolhida para representar o sistema em estudo.

Em muitas situações de interesse esse conhecimento apriorístico pode não estar disponível e uma escolha errônea da família de modelos deve ser evitada por razões óbvias. Os métodos não-paramétricos aplicam-se nestas circunstâncias, nas quais a única restrição de modelo que se impõe é que o sistema em estudo seja linear invariante no tempo, e portanto possa ser caracterizado por uma função de transferência. Ela então será discriminada de maneiras complementares através da resposta ao impulso ou a resposta em frequência. Essas vertentes dão origem às duas classificações normalmente encontrada para os métodos não paramétricos: os métodos temporais, que visam estimar a resposta ao impulso e os métodos frequenciais, que utilizam técnicas para estimar a resposta em frequência. Os métodos não-paramétricos não dão origem direta a um modelo na forma de uma função de transferência, e as representações obtidas são expostas na forma de gráficos bastante utilizados e conhecidos em engenharia de sistemas e controle, a saber: resposta ao impulso ou resposta em frequência.

Pode-se obstar à discussão acima que conhecida precisamente a resposta ao impulso ou

em freqüência de um sistema linear invariante, tem-se correspondentemente uma realização mínima na forma de pólos e zeros<sup>1</sup> Essa relação é expressa formalmente pela correspondência biunívoca estabelecida pelas transformadas de Laplace ou Fourier. Entretanto, deve-se ter claro para refutar essa consideração que esses métodos todos irão produzir estimativas a partir de medidas que estão sujeitas a imprecisões ou ruídos de natureza estocástica, e os diversos métodos aqui tratados conduzirão a resultados distintos. Avaliando-se o potencial dos métodos paramétricos frente aos não paramétricos, nota-se que a opção pela família de modelos perfeitamente casada ao sistema em estudo existente na primeira classe, via de regra irá produzir uma acuidade superior a daquela alcançada pela adoção dos modelos não-paramétricos.

Uma noção bastante importante na identificação de sistemas imersos em ruído é a idéia de repetição de ensaios, com o objetivo de se reforçar a imunidade ao ruído através de mediações sobre ensaios idênticos e independentes entre si. Isto é realizável quando possível for repetir o mesmo sinal de entrada sob as mesmas condições iniciais, quando se examina a resposta temporal transitória, ou pela repetição do mesmo sinal senoidal em regime permanente, no caso da resposta em freqüência. Estas questões serão discutidas na seções 2.2.1 e 2.3.1, respectivamente. Observa-se que a excitação por um sinal determinístico na forma de uma entrada conhecida e a mediação sobre as repetições de um sinal estocástico de média nula estabelece um reforço na relação sinal/ruído. Quando não é possível realizar repetições, nota-se que o foco dos métodos muda do sinal determinístico de entrada versus um sinal de ruído mediado, para exigências de certas características estocásticas dos sinais envolvidos. Supõe-se que a entrada e saída formem processos estacionários que satisfazem a hipótese ergódica, de tal forma que mediações sobre valores observados conduzem assintoticamente, quando observados durante um longo período, a estimativas adequadas de grandezas probabilísticas ou estocásticas tais como a autocorrelação da entrada e correlação cruzada da entrada e saída. Finalmente, a opção por métodos baseados em repetição ou em sinais ergódicos, ou eventualmente, numa combinação deles, irá depender em geral de considerações de ordem prática.

O modelo utilizado neste capítulo, será o de um sistema linear invariante no tempo, com resposta ao impulso definida pelo vetor  $h = (h(0), h(1), \dots)$ . A representação temporal é dada por

$$y(k) = h * u(k) + \epsilon(k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.1a)$$

$$\epsilon(k) = g * \nu(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.1b)$$

Aqui “\*” indica a série de convolução das funções correspondentes, isto é,  $h * u(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k-j)$ . A seqüência  $\{y(k)\}_{k=0,1,\dots}$  é denominada *saída observada*,  $\{u(k)\}_{k=0,1,\dots}$  e  $\{\epsilon(k)\}_{k=0,1,\dots}$ , são respectivamente, a *entrada acessível*, passível de ser definida e escolhida para excitar o sistema, e a *perturbação*, representando imprecisões na medida da saída, distúrbios não mensuráveis, ruídos de natureza estocástica ou imprecisões no modelo utilizado. Em suma, ela é representativa das ações sobre o sistema que não possam ser subtraídas facilmente. Muitas vezes quando a perturbação é modelada como ruído utiliza-se uma representação para  $\epsilon$  através de uma convolução de ruído branco como em (2.1b), na qual  $\{\nu(k)\}_{k=0,1,\dots}$  é uma seqüência de média nula, identicamente distribuída e independente entre si (ruído branco). Aqui  $g = (g(0), g(1), \dots)$  representa a resposta ao impulso de um filtro que realiza a transformação adequada. O sistema original poderia ser contínuo ou discreto, e indiferentemente, serão tomadas medidas espaçadas em

<sup>1</sup>Mínima aqui tem o sentido de mais econômica em número de pólos e zeros, na qual cancelamentos ou “quase”cancelamentos de pólos e zeros reduzem a ordem da realização do sistema.

instantes de tempo. Para sistemas contínuos no tempo, as medidas devem ser espaçadas periodicamente permitindo dessa forma uma representação da resposta ao impulso amostrada  $h$  que possa referenciar-se à resposta ao impulso original do sistema contínuo. Já no caso puramente discreto essas amostras podem ser escolhidas livremente dentre os valores disponíveis.

Identificar o sistema por um método não-paramétrico, significa obter uma estimativa da resposta dinâmica de um sistema na forma (2.1), através de uma estimativa  $\hat{h}$  da resposta ao impulso ou uma estimativa  $\hat{H}(j\omega)$  da resposta em frequência. Tem-se para este fim, a posse de um conjunto finito de observações de entrada e saída,  $\{u(k)\}_{k=0,\dots,T}$ ,  $\{y(k)\}_{k=0,\dots,T}$ , ou eventualmente de vários conjuntos de observações nesta forma.

## 2.2 Métodos de identificação temporais

O objetivo desta classe de métodos não paramétricos é a estimação das características do sistema no tempo, na forma da resposta ao impulso ou resposta ao degrau.

Serão abordados três métodos: método da resposta ao degrau por repetição e os métodos da convolução finita e das correlações que operam sobre um único segmento de observações.

### 2.2.1 Método da resposta ao degrau

Supõe-se que se deseja identificar um sistema na forma (2.1), e a princípio é possível dispor-se dele para a realização de ensaios, eventualmente, em um número elevado de repetições sem prejudicar a operação a que ele se destina. Por exemplo, pode-se realizar ensaios em uma usina de geração elétrica para determinar o comportamento dinâmico do gerador? Nem sempre isto será possível pois estes ensaios irão afetar a operação, mas em certos horários de baixa demanda é provável que se possa ensaiá-lo com entradas de acionamento cuidadosamente escolhidas.

Como exemplo, uma medida da resposta ao degrau a partir do repouso foi realizada, e o gráfico da resposta é aquele apresentado na Figura 2.1 (a). Observa-se a evidente presença de ruído na resposta, prejudicando qualquer conclusão sobre a medida da resposta obtida. Para estabelecer um modelo dinâmico este ensaio em si é insuficiente e será preciso introduzir-se algumas hipóteses, e certamente, será preciso mais ensaios.

Como hipótese de trabalho, vamos supor que o sistema seja linear invariante no tempo como em (2.1). Neste modelo, supõe-se que o ruído se manifesta de forma aditiva, e deseja-se observar a parte da saída referente à resposta à entrada de acionamento com a mínima influência da parcela de ruído. Quanto ao ruído, será preciso introduzir algumas hipóteses, relacionadas com os seguintes conceitos.

**Definição 1** (Karlin & Taylor 1975, cap 9) *Um processo estocástico discreto  $w = \{w(k)\}_{k=0,1,\dots}$  definido num espaço de probabilidade apropriado (com medida de probabilidade  $P$ ) é*

(i) *um processo estacionário se*

$$P(w(k_1) \in W_1, \dots, w(k_\ell) \in W_\ell) = P(w(k_1 + n) \in W_1, \dots, w(k_\ell + n) \in W_\ell)$$

*para todo  $k_1, \dots, k_\ell$ , isto é,  $P(w(k_1) \in W_1, \dots, w(k_\ell) \in W_\ell) = f(k_2 - k_1, \dots, k_\ell - k_{\ell-1}, W_1, \dots, W_\ell)$ , é uma função apenas dos intervalos espaciais  $W_1, \dots, W_\ell$  e dos intervalos de tempo  $k_2 - k_1, \dots, k_\ell - k_{\ell-1}$  entre observações e não depende do tempo absoluto.*

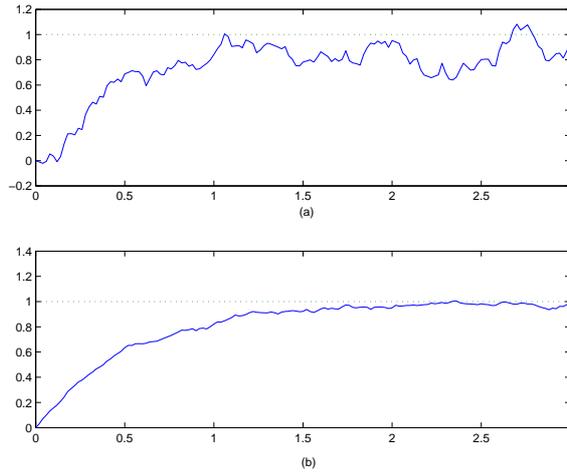


Figura 2.1: Possível resposta ao degrau de um sistema com ruído. (a) Uma realização típica; (b) Curva de resposta mediando 20 realizações.

(ii) um processo ergódico se  $w$  é estacionário e para toda função  $\phi$  real de  $\ell + 1$  variáveis,

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \phi(w(j), \dots, w(j + \ell)) - E[\phi(w(0), \dots, w(\ell))] \right| > \xi\right) = 0$$

para todo  $\xi > 0$ .

O conceito de convergência acima é denominado de convergência com probabilidade 1 ou convergência *quase certamente*. Ao se observar as  $i = 1, \dots, n$  realizações independentes de um processo ergódico,  $w^i(k), k \geq 0$  tem-se em particular que  $1/n \sum_{i=1}^n w^i(k)$  converge com probabilidade 1 para  $E[w(k)] = E[w(0)] = \bar{w}$ , sendo válidas estas igualdades por força da estacionariedade do processo  $w$ .

Supõe-se então que o ruído amostrado arbitrariamente,  $\{\nu(k)\}_{k=0,1,\dots}$  forme um processo ergódico. Nestas condições, uma solução para melhorar a acuidade das medidas para o sistema sujeito a ruído em (2.1) é a repetição do ensaio em condições invariantes. Ao se fixar um instante  $t$ ,  $1/n \sum_{i=1}^n \nu^i(t) \rightarrow E[\nu(t)] = \bar{\nu}$  com probabilidade 1, para realizações independentes do processo  $\nu^i$ . Assim, realizando sucessivos experimentos com entradas idênticas aplicadas ao sistema em questão, supondo que inicialmente ele esteja em repouso e mediando-se as respostas, vê-se que o limite com probabilidade 1 vale:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y^i(t) = h * \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u(t) \right) + g * \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nu^i(t) \right) \rightarrow h * u(t) + g * \bar{\nu}$$

Finalmente, se o ruído for de média nula, o limite tende à resposta à entrada de acionamento,  $h * u(t)$ .

A resposta ao degrau do experimento mostrado na Fig. 2.1 (a) mediada em 20 realizações tem o aspecto apresentado na Fig. 2.1 (b). Elas foram geradas utilizando-se uma representação de sistema de 1a. ordem entre a entrada  $u$  e a saída  $y$ , com constante de tempo  $\tau = 0,500$ , partindo-se do repouso com a entrada na forma de um degrau unitário. A constante de tempo pode ser estimada com razoável acuidade pela leitura do valor  $1 - e^{-1} = 0,632$  no gráfico (b).

No caso do sistema discreto (2.1), supondo que o ruído  $\epsilon$  mediado em  $n$  repetições seja desprezível, uma estimativa  $\hat{h}$  da resposta ao impulso pode ser obtida quando  $h = (h(0), \dots, h(J))$  é um vetor finito. Tem-se na resposta ao degrau unitário que  $\bar{y}(k) \approx \sum_{j=0}^{j^-} h(j)$  no qual denota-se  $\bar{y}(k) = 1/n \sum_{i=1}^n y^i(k)$  e  $j^- = \min[k, J]$ , e as estimativas individuais para  $h(j)$  podem ser obtidas desta relação.

As conclusões acima sobre a diminuição da sensibilidade ao ruído por repetição aplicam-se não só à simples identificação da resposta ao degrau, mas em situações bem mais gerais. Via de regra, qualquer procedimento de identificação de sistemas em presença de ruído estatisticamente independente da entrada beneficia-se do procedimento de repetições. Basta que seja possível realizar ensaios aplicando-se o mesmo sinal de entrada ao sistema, que por sua vez, deve estar sujeito às mesmas condições iniciais. Em particular, observe que as conclusões no exemplo baseiam-se na inicialização a partir do repouso, o que a rigor, não pode ser garantido quando o sistema é excitado por ruído estacionário.

### 2.2.2 Método da convolução finita

Supõe-se que se deseja identificar um sistema linear invariante no tempo na forma (2.1), aplicando-se uma seqüência  $u$  à entrada acessível. Uma representação para este experimento até um certo instante final  $T$ , é dada pela convolução discreta da seqüência de entrada e da resposta ao impulso  $h$  conforme (2.1a).

Note que a seqüência de resposta ao impulso  $\{h(j)\}_{j=0, \dots, \infty}$  é considerada infinita, pois basta que o sistema tenha pólos para que ela seja assim representada. Entretanto, se o sistema em estudo for estável, a resposta ao impulso  $h(j)$  tende a zero, pois caso contrário basta tomar uma entrada constante  $u(k)$  para todo  $k$  em (2.1a) para concluir que se  $h(j) \rightarrow 0$  não ocorre, a série que define  $y(k)$  não converge ou se torna ilimitada. Assim  $h(j) \rightarrow 0$  de forma suficientemente rápida para um sistema estável e pode-se fazer a seguinte consideração de truncamento. Para um escalar  $\delta > 0$  pequeno, se  $|h(j)| < \delta$  então adota-se  $h(j) \equiv 0$ . Aplicando-se essa aproximação conclui-se que para um sistema estável pode-se achar um número  $J$  de forma que  $h(j) = 0$  para todo  $j > J$ . Com isso pode-se aproximar a relação básica em (2.1a) por uma soma finita:

$$y(k) = h(0)u(k) + h(1)u(k-1) + \dots + h(J)u(k-J) + \epsilon(k) \quad (2.2)$$

Aqui  $\epsilon(k)$  acumula também os resíduos da aproximação adotada, mas não será adotada uma nova notação. Considera-se então que um experimento tenha como referência o instante inicial 0 e final  $T$ ; assim, serão envolvidas as amostras de entrada  $\{u(k)\}_{k=-J, \dots, T}$  e de saída correspondentes  $\{y(k)\}_{k=0, \dots, T}$ . Expressando a relação básica (2.2) de forma matricial tem-se que

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) & u(-1) & \dots & u(-J) \\ u(1) & u(0) & \dots & u(-J+1) \\ & & \vdots & \\ u(T) & u(T-1) & \dots & u(-J+T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(J) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon(0) \\ \epsilon(1) \\ \vdots \\ \epsilon(T) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

ou ainda, numa notação vetorial,  $y = Uh + \epsilon$ . Se o número de amostras  $T$  for maior ou igual ao parâmetro  $J$ , esse sistema de equações lineares pode ter solução. O método não paramétrico baseado na solução de (2.3) é denominado *método da convolução finita*.

Suponha que se faça  $T = J$  e que a matriz  $U$  seja inversível. Neste caso a estimativa para o vetor  $h$  será o valor  $\hat{h} = U^{-1}(y - \epsilon)$  o que é uma estimativa pobre, tanto mais pobre quanto maior for a magnitude dos elementos do vetor de resíduos  $\epsilon$ . Por exemplo,

se no ensaio a entrada aplicada for como o sinal de impulso discreto de amplitude  $\bar{u}$ , isto é,  $u(0) = \bar{u}$  e  $u(k) = 0$  para  $k \neq 0$ , obter-se-á a matriz  $U$  na forma diagonal. A estimativa de cada elemento do vetor  $h$  será  $\hat{h}(j) = y(j)/\bar{u} - \epsilon(j)/\bar{u}$ ,  $j = 0, \dots, J$  o que evidencia a influência sempre presente do ruído/resíduo, e a necessidade de se tomar aqui um valor elevado para  $\bar{u}$  para melhorar a relação sinal/ruído.

Quando  $T > J$  o sistema de equações (2.3) será sobre-determinado e a solução exata possivelmente não irá existir. Entretanto, condizente com o propósito de se obter uma boa estimativa da resposta ao impulso  $\hat{h}$ , deseja-se a melhor das estimativas, tendo-se um critério de distância entre os vetores  $h$  e o vetor  $\hat{h}$ . Tomando-se como critério a distância euclidiana usual entre o vetor de amostras de saída  $y$  observadas e aquelas que seriam produzidas pela convolução de  $\hat{h}$  e as amostras de entrada  $u$ , deseja-se minimizar  $\|y - U\hat{h}\|_2^2$  através da escolha de  $\hat{h}$ . O procedimento amplamente conhecido como método de mínimos quadrados resolve este problema. De fato, supondo que a matriz  $U'U$  seja inversível<sup>2</sup>, podemos desenvolver algebricamente a relação

$$\begin{aligned} \|y - U\hat{h}\|_2^2 &= (y - U\hat{h})'(y - U\hat{h}) \\ &= y'y - y'U\hat{h} - \hat{h}'U'y + \hat{h}'U'U\hat{h} \\ &= y'y - y'U[U'U]^{-1}[U'U]\hat{h} - \hat{h}'[U'U][U'U]^{-1}U'y + \hat{h}'[U'U]\hat{h} \\ &= y'y - ([U'U]^{-1}U'y)'[U'U]([U'U]^{-1}U'y)' \\ &\quad + (\hat{h} - [U'U]^{-1}U'y)'[U'U](\hat{h} - [U'U]^{-1}U'y) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Aqui utiliza-se a notação  $v'$  para indicar o vetor transposto de  $v$ . Note que (2.4) é uma função quadrática de  $\hat{h}$ , e por construção,  $v'[U'U]v \geq 0$  para todo vetor  $v \in \mathbb{R}^{J+1}$ , portanto ela possui um valor mínimo no argumento  $\hat{h}$ . Além disso, na última expressão em (2.4) os dois primeiros termos não dependem da escolha de  $\hat{h}$ , e pode-se afirmar que

$$\min_{h \in \mathbb{R}^{J+1}} \|y - Uh\|_2^2 = \min_{h \in \mathbb{R}^{J+1}} (h - [U'U]^{-1}U'y)'[U'U](h - [U'U]^{-1}U'y)$$

Obviamente, isto implica que o melhor estimador para  $h$  é

$$\hat{h} = [U'U]^{-1}U'y, \quad (2.5)$$

a conhecida solução de mínimos quadrados.

Substituindo a equação básica (2.3) em forma vetorial na expressão do estimador (2.5), obtém-se

$$\hat{h} = [U'U]^{-1}U'y = [U'U]^{-1}U'(Uh + \epsilon) = h + [U'U]^{-1}U'\epsilon \quad (2.6)$$

sendo assim o último termo relativo ao erro da estimativa. A análise deste erro de estimação será discutido no Comentário 2.2.1.

### 2.2.3 Método das correlações

Nesta seção supõe-se que o resíduo  $\{\epsilon(k)\}_{k=0, \dots, T}$  em (2.1a) é de fato um ruído, entendido aqui como um processo estocástico estacionário com média nula. Reescrevendo-se (2.1a) equivalentemente como

$$y(k+i) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k+i-j) + \epsilon(k+i). \quad (2.7)$$

<sup>2</sup>Como  $T > J$  a matriz  $U$  é denominada de matriz coluna. Um resultado de álgebra linear estabelece que a matriz  $U'U$  será inversível se o posto das linhas de  $U$  for igual a  $J+1$ . Em outra palavras,  $U$  precisa ter um número de linhas linearmente independentes igual ao número das colunas de  $U$ .

Multiplicando-se (2.7) pela entrada  $u$  no instante  $k$  e tomando-se o valor esperado, obtém-se

$$E[u(k)y(k+i)] = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) E[u(k)u(k+i-j)] + E[u(k)\epsilon(k+i)] \quad (2.8)$$

Para os dois processos  $\{u(k)\}_{k=-\infty, \dots, \infty}$  e  $\{y(k)\}_{k=-\infty, \dots, \infty}$ , definem-se a função de autocorrelação (FAC) de  $u$  por  $r_{uu}(k,i) = E[u(k)u(k+i)]$  e a função de correlação cruzada (FCC) de  $u$  e  $y$  por  $r_{uy}(k,i) = E[u(k)y(k+i)]$ . Como os processos em consideração são estacionários, temos que a FAC e a FCC não dependem explicitamente do instante  $k$  mas apenas da diferença  $i$  entre os instantes considerados. Em particular, supondo que a entrada não é correlacionada ao ruído, por exemplo quando ela é um sinal determinístico ou estocástico gerado de maneira independente do ruído, podemos calcular  $r_{u\epsilon}(k,i) = r_{u\epsilon}(i) = E[u(t)\epsilon(t+i)] = E[u(t)]E[\epsilon(t+i)] = \bar{u} \cdot \bar{\epsilon} = 0$  uma vez que o ruído tem média nula. Isso posto, obtém-se de (2.8) a equação de Wiener-Hopf:

$$r_{uy}(i) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)r_{uu}(i-j) \quad (2.9)$$

De maneira análoga à discutida na seção 2.2.2, considera-se a resposta ao impulso finita ou truncada, isto é, adota-se  $h(j) = 0$  para todos  $j > J$  de maneira apropriada. Obtém-se assim um sistema de equações, escrevendo (2.9) truncada:

$$\begin{bmatrix} r_{uy}(0) \\ r_{uy}(1) \\ \vdots \\ r_{uy}(J) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{uu}(0) & r_{uu}(-1) & \cdots & r_{uu}(-J) \\ r_{uu}(1) & r_{uu}(0) & \cdots & r_{uu}(-J+1) \\ & & \vdots & \\ r_{uu}(J) & r_{uu}(J-1) & \cdots & r_{uu}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(j) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

ou em notação vetorial,  $r_{uy} = Rh$ . A solução aqui expressa por (2.10) envolve um sistema de equações lineares quadrado, e se a matriz  $R$  for inversível (veja Comentários 2.2.1 e 2.2.2), a solução deste sistema será única e igual ao verdadeiro vetor  $h$  da resposta ao impulso truncado. Comparando-se com a solução obtida no método da convolução finita, em (2.10) não há mais a influência do ruído como em (2.3), e a solução de mínimos quadrados foi substituída pela solução exata, com vantagens óbvias.

### 2.2.3.1 Aproximação ergódica e comparação com o método da seção 2.2.2

O método das correlações é evidentemente superior ao método da convolução finita; entretanto para usá-lo é preciso dispor-se das FAC e FCC envolvidas, o que é extremamente raro em aplicações. É preciso então estimar as FAC e FCC o que pode ser feito através das observações temporais. Supondo que o ruído forme um processo ergódico, o sistema em estudo seja estável e entrada também possa ser tomada como um processo ergódico, então também a saída observada do sistema irá formar um processo ergódico. Com isso podemos supor que um estimador para as FAC e FCC que use da melhor maneira as  $T + J + 1$  amostras da entrada  $\{u(k)\}_{k=-J, \dots, T}$  e as  $T + 1$  amostras da saída  $\{y(k)\}_{k=0, \dots, T}$  seja dado respectivamente por:

$$\hat{r}_{uu}(i) = \hat{r}_{uu}(-i) = \frac{1}{T + 1 + J - i} \sum_{k=-J}^{T-i} u(k)u(k+i), \quad i = 0, \dots, T + J \quad (2.11)$$

$$\hat{r}_{uy}(i) = \frac{1}{T + 1 + [J - i]^-} \sum_{k=-J}^{T-i} u(k)y(k+i), \quad i = 0, \dots, T + J \quad (2.12)$$

no qual denota-se  $[a]^- = \min[0, a]$ . Com a hipótese de ergodicidade sabe-se que  $\hat{r}_{uu}(i) \rightarrow r_{uu}(i)$  e  $\hat{r}_{uy}(i) \rightarrow r_{uy}(i)$  com probabilidade 1 quando  $T \rightarrow \infty$ . Nestas condições, a forma de se utilizar o método das correlações é substituir-se as FAC e FCC em (2.10) pelas estimativas em (2.11) e (2.12), respectivamente.

Considere novamente a matriz  $U$  e o vetor  $y$  como em (2.3), e vamos avaliar as expressões  $U'U$  e  $U'y$ . Um elemento genérico de  $U'U$ , indicado por  $U'U(i, j)$  é dado por

$$U'U(i, j) = \sum_{k=0}^T u(k-i+1)u(k-j+1), \quad i = 1, \dots, J+1, j = 1, \dots, J+1$$

E um elemento genérico do vetor  $U'y$ , é dado por

$$U'y(i) = \sum_{k=0}^T u(k-i+1)y(k), \quad i = 1, \dots, J+1$$

Note das expressões acima que estimadores para a FAC e a FCC podem ser obtidos tomando-se  $\hat{r}_{uu}(i-j) = U'U(i, j)/(T+1)$  e  $\hat{r}_{uy}(i) = U'y(i+1)/(T+1)$ , respectivamente. Assim, uma maneira equivalente de se expressar (2.10) através destes estimadores é tomar

$$\frac{1}{T+1}U'y = \frac{1}{T+1}U'U\hat{h} \quad (2.13)$$

Observe que (2.13) torna a solução de (2.10) utilizando estes estimadores completamente idêntica à solução obtida através de mínimos quadrados, vide (2.5). Conclui-se que ao se estimar as FAC e FCC presentes na equação de Wiener-Hopf, a solução através do método das correlações tende a se igualar à obtida pelo método da convolução, à medida que o conjunto de observações aumenta. A diferença reside apenas no uso dos dados no extremo das amostras feitas pelos estimadores da FAC e FCC nos dois métodos.

**Comentário 2.2.1 (Propriedades assintóticas)** *Uma preocupação importante é saber quanto próximo a estimativa  $\hat{h}$  deve estar do verdadeiro valor  $h$ . De forma precisa, estuda-se o comportamento assintótico  $\hat{h} \rightarrow h$  quando o conjunto de dados de observação  $T \rightarrow \infty$ , e caso ocorra a convergência, qual é a sua taxa, analisando-se a variância da diferença  $h - \hat{h}$ . Para o estudo do comportamento assintótico da estimativa  $\hat{h}$  nos métodos das correlações e da convolução finita, as diferenças destacadas sobre o cálculo das estimativas de FAC e FCC se tornam irrelevantes, e pode-se recorrer à análise dos estimadores obtidos por mínimos quadrados em (2.5) ou em (2.13). Com as hipóteses enunciadas na Definição 1 da seção 2.2.1 sobre os sinais, tem-se que  $U'U \rightarrow R$  com probabilidade 1, e em vista de (2.6), podemos supor informalmente<sup>3</sup>  $\hat{h} - h \rightarrow R^{-1}r_{u\epsilon}$ . Portanto, para que  $\hat{h} - h$  seja assintoticamente nulo é preciso que: (i)  $r_{u\epsilon}$  seja nulo e (ii)  $R$  seja inversível. Para que o quesito (i) seja verdadeiro, uma das duas condições deverá ser satisfeita:*

1.  $\{\epsilon(k)\}_{k=-\infty, \dots, \infty}$  é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes entre si com média nula (ruído branco).
2.  $\{u(k)\}_{k=-\infty, \dots, \infty}$  é independente da seqüência de média nula  $\{\epsilon(k)\}_{k=-\infty, \dots, \infty}$

<sup>3</sup>O argumento não é totalmente formal porque (2.6) envolve a razão de dois termos convergentes, e a princípio a convergência da razão não pode ser assegurada. Para uma discussão mais completa vide (Ljung 1999, caps 8 e 9) no qual o estimador de mínimos quadrados é visto como um caso especial dos estimadores baseados em erro de predição.

Note que se a resposta ao impulso definida por  $h$  for infinita como em (2.1a), então a seqüência  $\epsilon$  além de ruído, contém também resíduos associados ao truncamento de  $h$ . Por essa razão torna-se interessante escolher a seqüência  $u$  independente entre si e com média nula. Uma vantagem adicional desta escolha é que a matriz de autocorrelação  $R$  em questão é a matriz diagonal  $\sigma_u^2 \cdot I$  ( $\sigma_u^2$  é a variância do sinal  $u$ ), sendo assim inversível e esta escolha aplica-se também ao quesito (ii) acima.

Com respeito à taxa de convergência, sob as circunstâncias aqui estabelecidas: estabilidade do sistema, estacionariedade e ergodicidade da seqüência  $\epsilon$  e da escolha adequada da entrada  $u$  tem-se que a covariância de  $\hat{h}$  é aproximadamente igual a  $1/T \cdot P_{\text{COV}}$ , no qual  $P_{\text{COV}}$  é uma matriz de covariância finita, vide (Söderström & Stoica 1989, apêndice A3.2) ou (Ljung 1999, cap. 9).

**Comentário 2.2.2 (Condicionamento do sinal de entrada)** Sempre que for possível manipular a entrada  $u$  é interessante escolhê-la de forma a facilitar o problema de identificação. Pretende-se tornar (2.6) ou as estimativas para (2.10) numericamente adequadas e fáceis de resolver, resultando desta escolha a boa qualidade das estimativas.

A princípio, a entrada deve excitar o sistema apropriadamente em toda a faixa de freqüências na qual o sistema possa evidenciar a sua característica dinâmica através da sua resposta. Isto é equivalente a exigir que a densidade espectral do sinal de entrada  $\phi_u(\omega)$  seja estritamente positiva para toda freqüência  $\omega$  de interesse. Um sinal de entrada que seja estacionário e tenha essa característica, é chamado de entrada persistentemente excitante, vide (Ljung 1999, def. 13.2). Suponha que a entrada seja um sinal de ruído branco estacionário de média nula ideal, isto é,  $u$  forma uma seqüência de variáveis aleatórias independentes entre si tal que  $E[u(k)] = 0$  e  $E[u(k)^2] = \sigma_u^2 > 0$ , e devido a independência,  $E[u(k)u(k+\ell)] = 0$  para todo  $\ell \neq 0$ . Tem-se neste caso ideal que a densidade espectral  $\phi_u(\omega) = \sigma_u^2$  e portanto satisfaz a condição de ser persistentemente excitante para qualquer que seja o sistema ensaiado. Note ainda que esta escolha fará que a matriz de correlação  $R$  em (2.10) seja a matriz diagonal  $\sigma_u^2 \cdot I$  o que facilita o cálculo da estimativa  $\hat{h}$  conforme o quesito (ii) do Comentário 2.2.1.

Desta constatação, pode-se inverter o domínio de definição do sinal persistentemente excitante. Um sinal de entrada é persistentemente excitante de ordem  $J$  se a matriz de correlação  $R$  de dimensão  $J \times J$  correspondente for não-singular. Portanto, um sinal deste tipo bastaria para dar sentido ao método das correlações para um sistema cuja resposta ao impulso fosse um vetor de dimensão  $J$ . De volta para o domínio de freqüências, essa noção implica que para qualquer função de transferência na forma  $H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + \dots + h(J-1)z^{J-1}$  tem-se que  $|H(e^{j\omega})|^2 \phi_u(\omega) = 0$  somente se  $|H(e^{j\omega})|^2 = 0$ , vide (Aguirre 2004, cap. 4).

Pode-se concluir que um sinal de entrada que seja formado por uma seqüência de variáveis aleatórias independentes entre si e igualmente distribuídas é um sinal adequado para a identificação. Uma maneira de produzir este tipo de entrada é adotar um sinal binário com dois níveis apropriados, e sortear de forma independente o valor do nível para cada instante. A vantagem de se excitar através de níveis fixos, em vez de sortear-se variáveis aleatórias contínuas e não limitadas como por exemplo a gaussiana, é a de se evitar que sinais de excitação possivelmente com grandes amplitudes possam ser gerados.

Uma implementação simples de um sinal binário com essas características é produzida por circuitos binários de fácil construção, que geram as chamadas seqüências de comprimento máximo. Esses sinais são denominados sinais binários pseudo-aleatórios<sup>4</sup> e a seqüência gerada é de fato determinística e periódica. Porém o período é conhecido e pode

<sup>4</sup>Conhecidos pelo acrônimo PRBS do inglês.

ser escolhido de forma a ser suficientemente longo, vide (Aguirre 2004, cap. 4) para mais detalhes.

## 2.3 Métodos de identificação freqüenciais

O objetivo desta classe de métodos não-paramétricos é a estimação das características do sistema no domínio da freqüência, em particular da resposta em freqüência do sistema.

Serão abordados dois métodos: varredura em freqüência e densidades espectrais. Enquanto o método da varredura emprega sinais senoidais como entrada do sistema, o método das densidades espectrais emprega sinais com características estocásticas adequadas.

### 2.3.1 Método da varredura em freqüência

A relação entre a entrada e a saída de um sistema linear contínuo, invariante no tempo e estável é descrita em (2.1a). Ao se calcular a transformada de Fourier desta relação obtém-se

$$Y(j\omega) = H(j\omega) U(j\omega) + E(j\omega), \quad (2.14)$$

onde  $U(j\omega)$ ,  $Y(j\omega)$  e  $E(j\omega)$  são, respectivamente, as transformadas da entrada, da saída e da perturbação, e  $H(j\omega)$  é a transformada da resposta ao impulso, denominada de resposta em freqüência do sistema.

Considera-se aqui que o símbolo  $\omega$  representa a freqüência normalizada pela freqüência de amostragem dos sinais temporais, ou seja,  $\omega = 2\pi f/f_a$ , onde  $f$  é a freqüência em Hertz e  $f_a$  é a freqüência de amostragem. Assim, a periodicidade da transformada de Fourier de sinais discretos no tempo será sempre igual a  $2\pi$ , independente de  $f_a$ . Para os sistemas ou sinais originalmente discretos onde não se identifica claramente uma freqüência de amostragem, considera-se  $f_a = 1$ .

Quando a entrada de tal sistema é do tipo senoidal, a saída em regime permanente também é senoidal com a mesma freqüência da entrada, porém com amplitude e ângulo de fase distintos. Se a entrada é  $u(k) = A_0 \sin(\omega_0 k)$ , então a saída será  $y(k) = |H(j\omega_0)| A_0 \sin(\omega_0 k + \angle H(j\omega_0))$ , com  $|H(j\omega_0)|$  e  $\angle H(j\omega_0)$  respectivamente, o módulo e o argumento do número complexo  $H(j\omega_0)$ .

Estas expressões mostram que a resposta em freqüência de um sistema linear pode ser identificada usando-se uma entrada senoidal. O módulo  $|H(j\omega_0)|$  é obtido medindo-se a relação entre as amplitudes dos sinais de saída e de entrada, ao passo que o argumento  $\angle H(j\omega_0)$  resulta da diferença entre os ângulos da saída e da entrada. Variando-se a freqüência da entrada senoidal, consegue-se medir a resposta em freqüência em função da freqüência.

#### 2.3.1.1 Redução dos efeitos dos ruídos

Num ensaio experimental para executar a identificação do sistema, as medidas necessárias não serão exatas devido a imprecisões no sinal de entrada, a imperfeições do medidor, a presença de ruídos e de interferências de diversas naturezas, ao efeito de quantização dos sinais, etc. Assim, embora idealmente o sinal  $y(k)$  devesse ser senoidal, em geral ele contém imperfeições cujos efeitos devem ser combatidos.

A qualidade das medidas pode ser melhorada realizando-se um tratamento numérico desse sinal  $y(k)$ , conforme descrito a seguir.

Para uma dada frequência  $\omega_0$ , a saída  $\{y(k)\}_{k=0,1,\dots,T}$  é multiplicada pelos sinais  $\cos(\omega_0 k)$  e  $\sin(\omega_0 k)$  e os resultados são somados ao longo do tempo, gerando os valores  $y_c$  e  $y_s$  da seguinte forma

$$y_c = \frac{1}{T+1} \sum_{k=0}^T \left( A_0 |H(\omega_0)| \sin(\omega_0 k + \underline{|H(j\omega_0)|}) \cos(\omega_0 k) + \epsilon(k) \cos(\omega_0 k) \right) \quad (2.15)$$

$$y_s = \frac{1}{T+1} \sum_{k=0}^T \left( A_0 |H(\omega_0)| \sin(\omega_0 k + \underline{|H(j\omega_0)|}) \sin(\omega_0 k) + \epsilon(k) \sin(\omega_0 k) \right) \quad (2.16)$$

Para a primeira parcela da soma na expressão (2.15) tem-se

$$\sin(\omega_0 k + \underline{|H(j\omega_0)|}) \cos(\omega_0 k) = \frac{1}{2} \sin(\underline{|H(j\omega_0)|}) + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 k + \underline{|H(j\omega_0)|}) \quad (2.17)$$

Substituindo este resultado na expressão (2.15) obtém-se

$$y_c = \frac{A_0 |H(\omega_0)|}{2} \sin(\underline{|H(j\omega_0)|}) + \frac{A_0 |H(\omega_0)|}{2(T+1)} \sum_{k=0}^T \sin(2\omega_0 k + \underline{|H(j\omega_0)|}) + \frac{1}{T+1} \sum_{k=0}^T \epsilon(k) \cos(\omega_0 k) \quad (2.18)$$

A segunda parcela desta expressão tende a zero quando  $T \rightarrow \infty$ . Supondo que  $\epsilon(k)$  é um sinal estocástico estacionário e de média nula, demonstra-se (Ljung 1999) que a terceira parcela também tende a zero quando  $T \rightarrow \infty$ , decaindo assintoticamente com  $1/k$ .

O mesmo procedimento aplicado ao sinal  $y_s$  em (2.16) leva a resultados similares, e o termo persistente assintoticamente é

$$y_s = \frac{A_0 |H(\omega_0)|}{2} \cos(\underline{|H(j\omega_0)|}) \quad (2.19)$$

Combinando a primeira parcela de (2.18) com (2.19), obtém-se os seguintes estimadores

$$|\hat{H}(\omega_0)| = \frac{2\sqrt{y_s^2 + y_c^2}}{A_0} \quad \underline{\hat{H}(j\omega_0)} = \arctan\left(\frac{y_s}{y_c}\right) \quad (2.20)$$

Este método é robusto e é usado em aplicações práticas, pois a qualidade das estimativas melhora à medida que  $T$  cresce. Sua desvantagem é o tempo necessário para a realização das medidas, pois as somas para a redução do ruído só podem ser realizadas após a estabilização do sinal de saída e é necessário realizar uma varredura em frequência, variando-se  $\omega_0$  de forma adequada para se obter uma estimativa de  $H(\omega)$  ao longo de sua faixa de frequências significativa. Também, quanto menor o valor da frequência  $\omega_0$ , maior deverá ser o intervalo de soma.

### 2.3.2 Método das densidades espectrais

Este método também estima a resposta em frequência do sistema a ser identificado. Porém, ao contrário do método anterior, exige sinais estocásticos como entrada do sistema. No que se refere a este último aspecto, este método se assemelha àquele descrito na seção 2.2.3 e pode ser interpretado como uma tradução daquele método para o domínio da frequência.

### 2.3.2.1 Densidades espectrais de potência e resposta em frequência

Partindo-se das definições das funções de FAC e FFC da seção 2.2.3, pode-se demonstrar que suas transformadas de Fourier são (Kay 1988):

$$\Phi_{uy}(j\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r_{uy}(i) e^{-j\omega i}, \quad (2.21)$$

$$\Phi_u(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r_{uu}(i) e^{-j\omega i}, \quad (2.22)$$

onde  $\Phi_{uy}(j\omega)$  e  $\Phi_u(\omega)$  são densidades espectrais de potência. De posse destas relações demonstra-se (Söderström & Stoica 1989) que a transformada de Fourier da relação (2.9) produz

$$\Phi_{uy}(j\omega) = H(j\omega)\Phi_u(\omega). \quad (2.23)$$

Logo, a resposta em frequência de um sistema linear invariante com o tempo e estável pode ser obtida de (2.23), desde que se conheça as funções espectrais envolvidas. Para a identificação de um sistema, torna-se necessário, portanto, obter estimativas  $\hat{\Phi}_{uy}(j\omega)$  e  $\hat{\Phi}_u(\omega)$  destas funções espectrais.

No formalismo a seguir, referente aos estimadores clássicos não-paramétricos para densidades espectrais, supõe-se que os sinais de entrada  $u$  e de saída  $y$  são estocásticos e ergódicos. Supõe-se ainda que estão disponíveis as amostras  $\{u(k)\}_{k=0,1,\dots,T}$  e  $\{y(k)\}_{k=0,1,\dots,T}$ .

Um dos estimadores espectrais não-paramétricos mais usado é o Periodograma, definido como (Kay 1988)

$$\hat{\Phi}_u(\omega) = \frac{1}{T+1} \left| \sum_{k=0}^T u(k) e^{-j\omega k} \right|^2, \quad (2.24)$$

ou seja, baseia-se na transformada de Fourier da seqüência disponível e, portanto, faz uso das vantagens dos algoritmos de Transformada Rápida de Fourier (FFT).

A expressão (2.24) pode ser reescrita (para sinais reais) na forma :

$$\hat{\Phi}_u(\omega) = \frac{1}{T+1} \sum_{n=0}^T \sum_{m=0}^T u(n)u(m) e^{-j\omega(m-n)}. \quad (2.25)$$

De forma análoga,

$$\hat{\Phi}_{uy}(j\omega) = \frac{1}{T+1} \sum_{n=0}^T \sum_{m=0}^T u(n)y(m) e^{-j\omega(m-n)}. \quad (2.26)$$

Usando as propriedades da transformada de Fourier, de (2.25) e (2.26) obtém-se, respectivamente:

$$\hat{\Phi}_u(\omega) = \frac{1}{T+1} U_T(j\omega)U_T(-j\omega), \quad \hat{\Phi}_{uy}(\omega) = \frac{1}{T+1} Y_T(j\omega)U_T(-j\omega), \quad (2.27)$$

nas quais  $U_T(j\omega)$  e  $Y_T(j\omega)$  são respectivamente as transformadas de Fourier das amostras  $\{u(k)\}_{k=0,1,\dots,T}$  e  $\{y(k)\}_{k=0,1,\dots,T}$ .

A substituição destas expressões em (2.23) produz

$$\hat{H}(j\omega) = \frac{Y_T(j\omega)}{U_T(j\omega)}, \quad (2.28)$$

a qual é conhecida como *estimativa empírica da resposta em frequência*.

Esta estimativa produz resultados pobres, conseqüência das propriedades do Periodograma e do estimador resultante da relação entre as estimativas do Periodograma. Estas propriedades são analisadas na seção a seguir, onde também são apresentadas alternativas para modificação deste estimador visando minorar suas deficiências. Como conseqüência, a simplificação que levou à expressão (2.28) não mais poderá ser aplicada e a estimativa da resposta em frequência deverá ser obtida como

$$\hat{H}(j\omega) = \frac{\hat{\Phi}_{uy}(\omega)}{\hat{\Phi}_u(\omega)}, \quad (2.29)$$

onde os estimadores de densidade espectral serão versões modificadas do Periodograma.

### 2.3.2.2 Propriedades do estimador Periodograma

Embora as propriedades do Periodograma sejam analisadas com base na estimativa  $\hat{\Phi}_u(\omega)$ , todas as conclusões são válidas também para a estimativa  $\hat{\Phi}_{uy}(j\omega)$ .

Referindo-se à expressão (2.25), é possível mostrar que (Kay 1988)

$$E[\hat{\Phi}_u(\omega)] = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_u(\alpha) W^{B(2T)}(j\omega - j\alpha) d\alpha, \quad (2.30)$$

onde  $W^{B(2T)}(j\omega)$  é a transformada de Fourier da janela de Bartlett (Kay 1988) com largura  $2T$  e centrada em  $k = 0$ . A Figura 2.2 mostra esta transformada<sup>5</sup>.

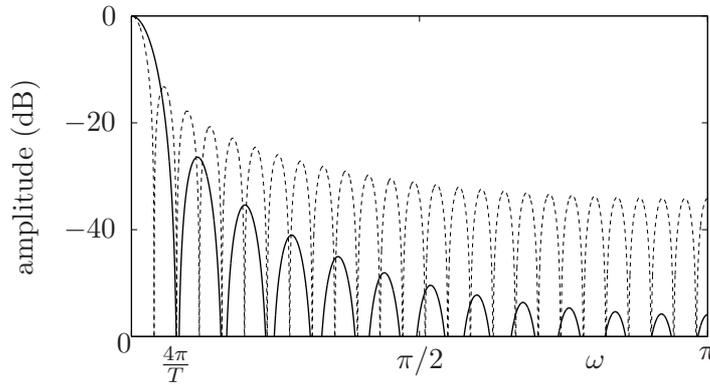


Figura 2.2: Transformada de Fourier das janelas de Bartlett (—) e retangular (- -) com largura  $T$ .

A expressão (2.30) mostra que a estimativa do Periodograma é polarizada através de uma convolução espectral. Esta polarização desaparece quando  $T \rightarrow \infty$ , pois então  $W^{B(2T)}(j\omega)$  converge para o impulso de Dirac  $\delta(j\omega)$ . A polarização também desaparece quando  $\Phi_u(\omega) = \sigma_u^2$ , isto é, quando  $u$  é um sinal com características de ruído branco.

Uma outra forma de interpretar a polarização do Periodograma pode ser desenvolvida lembrando que o Periodograma é baseado na transformada de Fourier, conforme a expressão (2.27), e que  $U_T(j\omega)$  pode ser calculada como

$$U_T(j\omega) = \frac{1}{T+1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) w^{R(T)}(k) e^{-j\omega k}, \quad (2.31)$$

<sup>5</sup>Vide também a Figura 2.3 ao final desta seção para observar a janela de Bartlett no tempo e alguns conceitos sobre os sinais denominados de janela.

onde  $\{w^{R(T)}(k)\}_{k=0,1,\dots,T}$  designa a janela retangular de largura  $T + 1$  (Vide Figura 2.3).

De (2.31) conclui-se que  $U_T(j\omega)$  pode ser interpretada como o resultado da convolução entre a transformada de Fourier do sinal  $u$  e a transformada da janela retangular, a qual está mostrada na Figura 2.2. Esta interpretação mostra que a origem do fenômeno de polarização é o número finito de amostras disponível do sinal a ser analisado, uma vez que, à medida que  $T$  aumenta, a transformada da janela retangular tende ao impulso de Dirac, eliminando a polarização.

Esta interpretação também remete ao conceito de resolução espectral, o qual se refere à capacidade do estimador em distinguir detalhes próximos entre si. Para ilustrar este conceito, considere, por exemplo, a transformada de Fourier de um sinal senoidal na frequência  $\omega_1$ , a qual é composta apenas por dois impulsos em  $\pm \omega_1$ . Quando se calcula a transformada de  $T$  amostras deste sinal senoidal, ocorre a convolução entre as transformadas da senóide e da janela retangular, cujo resultado é a própria transformada da janela deslocada para as frequências  $\pm \omega_1$ . Assim, o truncamento do sinal no tempo produz um alargamento da transformada original determinado principalmente pelo lóbulo central da transformada da janela. Demonstra-se que a largura deste lóbulo central é proporcional a  $1/T$  (Stoica & Moses 1997). Em seguida, considere dois sinais senoidais somados, com frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . O truncamento no tempo desta soma produz uma soma das transformadas da janela retangular centrados em  $\pm \omega_1$  e  $\pm \omega_2$ . Considerando o eixo  $\omega > 0$ , quando  $|\omega_1 - \omega_2| \gg 2\pi/T$ , os lóbulos centrais deslocados não se interferem e formam dois picos espectrais, os quais permitem identificar as duas frequências componentes. Porém, quando  $|\omega_1 - \omega_2|$  é aproximadamente igual a  $2\pi/T$  ou menor, os dois lóbulos se somam, produzindo um único pico que mascara a presença de duas senóides. Assim, é usual afirmar que duas senóides de mesma amplitude, observadas durante  $T$  segundos, serão discerníveis se as suas frequências diferirem pelo menos de  $2\pi/T$ .

Conclui-se então que a polarização e a resolução finita do Periodograma decorrem do número finito de amostras temporais. Portanto, todos os estimadores espectrais apresentam estas características.

Resta agora analisar a covariância do Periodograma, a qual é dada por (Kay 1988)

$$\text{cov}[\hat{\Phi}_u(\omega_1)\hat{\Phi}_u(\omega_2)] \approx \Phi_u(\omega_1)\Phi_u(\omega_2)\{W^{B(2T)}(j\omega_1 + j\omega_2) + W^{B(2T)}(j\omega_1 - j\omega_2)\}. \quad (2.32)$$

De(2.32) pode-se demonstrar (Kay 1988) que a variância deste estimador, para frequências não próximas de  $\omega = 0$  e de  $\omega = \pi$ , é dada por

$$\text{var}[\hat{\Phi}_u(\omega)] \approx \Phi_u^2(\omega), \quad (2.33)$$

a qual, além do valor desfavorável, não depende de  $T$ , isto é, não diminui quando se dispõe de um número crescente de amostras do sinal  $u$ .

Também de (2.32), pode-se concluir que as estimativas nas frequências  $\omega_1 = 2\pi k/T$  e  $\omega_2 = 2\pi \ell/T$ ,  $k$  e  $\ell$  inteiros distintos, são descorrelacionadas. Além disto, a distância em frequência entre tais estimativas decresce quando  $T$  cresce.

Estas considerações indicam que as estimativas via Periodograma apresentam flutuações exageradas e que as mesmas não podem ser reduzidas aumentando-se  $T$ . Um dos elementos determinantes do comportamento desta variância é a ausência de qualquer operação de mediação para gerar a estimativa da densidade espectral. Para analisar o efeito de mediações sobre o Periodograma, supõe-se agora que se dispõe de  $I$  realizações independentes  $\{u^i(k)\}_{k=0,1,\dots,T; i=1,2,\dots,I}$  do sinal  $u$ . Pode-se então calcular um Periodograma  $\hat{\Phi}_u^i(\omega)$  para cada realização e definir o Periodograma Mediado:

$$\hat{\Phi}_{uM}(\omega) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \hat{\Phi}_u^i(\omega). \quad (2.34)$$

Para este novo estimador tem-se (Kay 1988) que:

$$E \left[ \hat{\Phi}_{uM}(\omega) \right] = E \left[ \hat{\Phi}_u^i(\omega) \right], \quad (2.35)$$

ou seja, a polarização é a mesma do Periodograma convencional. Porém,

$$\text{var} \left[ \hat{\Phi}_{uM}(\omega) \right] = \frac{1}{I} \text{var} \left[ \hat{\Phi}_u^i(\omega) \right], \quad (2.36)$$

indicando que a variância é reduzida pelo fator  $I$  e que, portanto, tende a zero quando  $I \rightarrow \infty$ .

Esta última conclusão motiva a apresentação do Periodograma de Welch que pode ser interpretado como uma tentativa de implementar o Periodograma Mediado quando se dispõe de apenas uma realização do sinal  $u$ . Este sinal disponível  $\{u(k)\}_{k=0,1,\dots,T}$  é dividido em  $I$  trechos com comprimentos  $L$  e com sobreposição entre trechos de, tipicamente, 50% ou 75%. Calcula-se um Periodograma  $\hat{\Phi}_u^i(\omega)$  para cada trecho e calcula-se a média aritmética dos mesmos. Esta mediação reduz a variância do Periodograma de forma semelhante àquela da expressão (2.36), porém com um fator menor que  $I$ , uma vez que os segmentos não são independentes.

Embora o Periodograma de Welch seja bem sucedido na redução da variância, há um preço a pagar: ocorre um aumento da polarização e, conseqüentemente, uma redução da resolução espectral, pois agora os segmentos têm comprimento  $L < T + 1$ . A prática do uso do Periodograma de Welch recomenda a realização de diversos ensaios com valores de  $L$  distintos, partindo-se de  $L = T + 1$ , de modo a gerar uma gama de estimativas com características distintas

Além destes fatores, o Periodograma de Welch emprega janelas diferentes da retangular para delimitar os segmentos com comprimento  $L$ . O uso de janelas produz dois novos fatores conflitantes: quanto mais suave o comportamento da janela no tempo, maior é a redução da variância do estimador, porém, menor é a resolução em frequência. Isto ocorre porque o comportamento suave no tempo reduz a amplitude dos lóbulos laterais do espectro da janela, o que reduz a variância da estimativa espectral. Porém, esta redução dos lóbulos laterais é acompanhada de um aumento da largura do lóbulo central, o que reduz a resolução. Assim, por exemplo, ao se trocar a janela retangular pela janela de Blackman (vide Figura 2.3), ganha-se em termos de variância mas perde-se em termos de resolução e, portanto, de polarização.

**Comentário 2.3.1 (Resolução espectral na identificação de sistemas)** *O conceito de resolução espectral é bastante usado na análise espectral. A identificação de sistemas também pode se beneficiar deste conceito quando a resposta em frequência apresenta picos ou vales estreitos, como nos sistemas com ressonâncias agudas. Nestes casos, a resolução espectral fornece um indicativo importante sobre a duração do intervalo de tempo no qual a entrada e a saída devem ser observadas de modo a garantir que os picos ou vales da resposta em frequência sejam adequadamente discernidos. Este indicativo é fornecido pela seguinte regra: o tempo de observação deve ser maior que  $2\pi/\Delta\omega$ , onde  $\Delta\omega$  é a diferença entre as frequências a serem discriminadas.*

**Comentário 2.3.2 (Intervalo de confiança)** *Trata-se aqui da definição de intervalos de confiança para a estimativa do Periodograma, isto é, da definição de uma região ao redor de uma estimativa  $\hat{\Phi}_u(\omega)$  na qual se tem uma probabilidade pré-definida de se encontrar o verdadeiro valor  $\Phi_u(\omega)$ . Demonstra-se (Jenkins & Watts 1968) que o intervalo com  $(1 - \alpha)100\%$  de confiança para o Periodograma Mediado tem os seguintes limites:*

$$\frac{2K\hat{\Phi}_{uM}(\omega)}{\chi_{2K}^2(1-\alpha/2)}, \quad \frac{2K\hat{\Phi}_{uM}(\omega)}{\chi_{2K}^2(\alpha/2)} \quad (2.37)$$

onde  $\chi_I^2$  é a função densidade de probabilidade qui-quadrada, isto é, é a função densidade da variável  $Y = \sum_{i=1}^I V_i^2, V_i$  com distribuição normal  $N(0,1)$ , e  $\chi_I^2(\alpha)$  é tal que  $\text{Prob}(Y \leq \chi_I^2(\alpha)) = \alpha$ .

**Comentário 2.3.3 (Janelas)** As janelas são seqüências de comprimento finito com propriedades adequadas para delimitar trechos de sinais. São usadas em todos os domínios, mas serão abordadas aqui no domínio do tempo. A ação delimitadora é conseguida via multiplicação da janela pelo sinal.

Existem inúmeros tipos de janelas na literatura, cada qual com propriedades particulares. A Figura 2.3 ilustra algumas janelas bastante usadas (Oppenheim & Schaffer 2000). Observe que as janelas são nulas para  $|k| > M$  e são simétricas em torno de  $k = 0$ . Observe ainda que a janela retangular apresenta a transição mais abrupta nas extremidades. As demais janelas apresentam evoluções mais suaves, sendo a de Blackman a mais suave dentre aquelas mostradas na Figura 2.3.

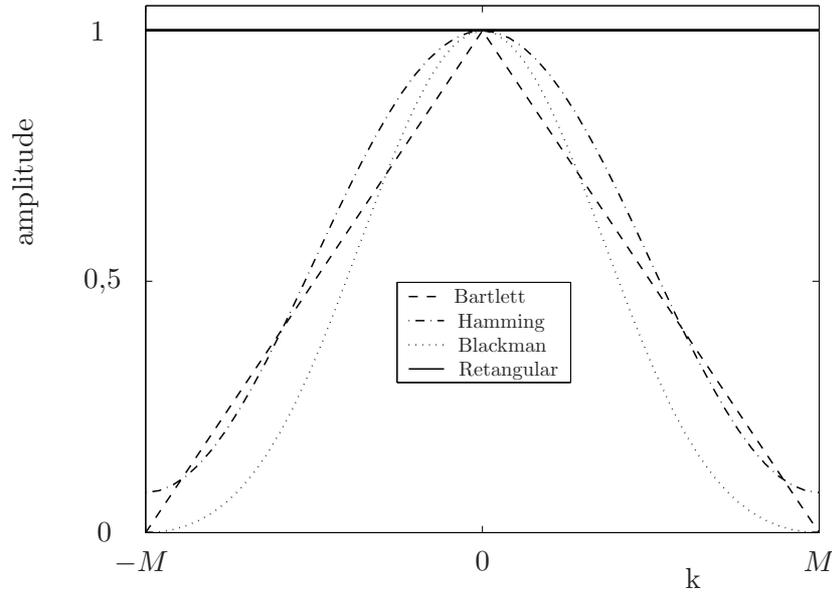


Figura 2.3: Janelas típicas.

Quando se opera no domínio do tempo, as diferenças entre os resultados produzidos pelas diversas janelas são, em geral, analisadas no domínio da transformada de Fourier e vice-versa. Isto porque a multiplicação entre dois sinais em um determinado domínio, resulta na operação de convolução entre os respectivos sinais no domínio transformado. Cabe dizer aqui que a opção por uma janela, em geral, resulta de experimentos a cada caso.

### 2.3.2.3 Estimador Correlograma

A seguir será definido um outro estimador de densidade espectral, denominado Correlograma. Este é também um estimador não-paramétrico clássico e será definido a partir do Periodograma objetivando evidenciar a relação entre ambos.

A expressão (2.25), que define o Periodograma, pode ser reescrita na seguinte forma (Stoica & Moses 1997)

$$\hat{\Phi}_u(\omega) = \sum_{k=-T}^T \hat{r}_{uu}(k) e^{-j\omega k}, \quad (2.38)$$

onde  $\hat{r}_{uu}(k)$  é um estimador de correlação definido como

$$\hat{r}_{uu}(k) = \frac{1}{T+1} \sum_{n=0}^{T-k} u(n)u(n+k), \quad k = 0, 1 \dots T; \quad \hat{r}_{uu}(k) = \hat{r}_{uu}(-k). \quad (2.39)$$

As expressões (2.38) e (2.39) definem o Correlograma. Como foi possível deduzir este estimador a partir da definição do Periodograma, conclui-se de imediato que os dois estimadores são idênticos.

Dado que o Correlograma é o resultado da transformada de Fourier do estimador  $\hat{r}_{uu}$ , é importante analisar algumas propriedades deste estimador de correlação. Pode-se demonstrar (Stoica & Moses 1997) que

$$E[\hat{r}_{uu}(k)] = \left(1 - \frac{|k|}{T+1}\right) r_{uu}(k), \quad |k| \leq T, \quad (2.40)$$

o que mostra que este estimador é polarizado.

Além da polarização, este estimador de correlação apresenta uma diminuição gradativa da qualidade das estimativas à medida que  $k$  aumenta e se aproxima de  $T$ . Isto porque o número de parcelas  $u(n)u(n+k)$  diminui com o aumento de  $k$ . Logo, as estimativas nas caudas da seqüência de correlação, isto é, para  $|k|$  próximo de  $T$ , são relativamente pobres. Este fato é usado para explicar a variância do estimador espectral Correlograma, a qual é a mesma do Periodograma.

Apesar destes aspectos negativos, o estimador de correlação gera seqüências semidefinidas positivas (Stoica & Moses 1997), o que garante que as estimativas espectrais geradas a partir delas são não-negativas, como devem ser as estimativas de densidade espectral de potência.

Existe uma alternativa para o estimador de correlação polarizado da expressão (2.39), a qual resulta quando o fator  $1/(T+1)$  é trocado por  $1/(T+1-k)$ . Este novo estimador não é polarizado, pois pode-se verificar que a expressão de sua esperança matemática é igual àquela em (2.40) dividida pelo fator  $(1 - |k|/(T+1))$ . Por outro lado, as seqüências geradas por este novo estimador não são semidefinidas positivas e, portanto, as estimativas de densidade espectral correspondentes podem apresentar valores negativos. Além disto, este estimador tem uma qualidade pior nas caudas, uma vez que a ação atenuadora exercida pelo fator multiplicativo  $1/(T+1)$  foi alterada.

A estratégia mais adotada para atenuar os efeitos das caudas da estimativa da correlação é o uso de uma janela na definição do Correlograma, dando origem ao Correlograma de Blackman e Tukey definido como

$$\hat{\Phi}_u^{BT}(\omega) = \sum_{k=-M}^M w^{2M}(k) \hat{r}_{uu}(k) e^{-j\omega k}, \quad (2.41)$$

onde  $M \leq T$ . Para assegurar que a estimativa da densidade espectral não apresente valores negativos, é usual escolher uma janela  $w^{2M}$  cuja transformada de Fourier seja não-negativa.

Tendo em conta que  $\hat{\Phi}_u^{BT}(\omega)$  resulta da transformada de Fourier do produto de  $\hat{r}_{uu}(k)$  com  $w^{2M}(k)$ , esta estimativa se relaciona com aquela produzida pelo Periodograma,  $\hat{\Phi}_u(\omega)$ , através da seguinte convolução

$$\hat{\Phi}_u^{BT}(\omega) = \hat{\Phi}_u(\omega) * W^{2M}(j\omega). \quad (2.42)$$

Novamente, a convolução implica em uma suavização da estimativa fornecida pelo Periodograma, com conseqüente redução de variância, porém ao custo de uma redução da resolução espectral.

A forte relação que existe entre os estimadores da classe Periodograma e da classe Correlograma, torna indiferente a escolha entre as classes. Por fim, outro aspecto de semelhança é que ambas podem fazer uso dos algoritmos de Transformada Rápida de Fourier para agilizar os cálculos envolvidos.

Retornando à expressão (2.28) e à observação sobre a qualidade de suas estimativas, a qual levou à expressão (2.29), pode-se agora finalizar o estudo do método das densidades espectrais. A estimativa da resposta em frequência deve ser calculada através da expressão (2.29) estimando-se as funções de densidade através do Periodograma de Welch ou do Correlograma de Blackman e Tukey, que são, por sua vez, formas equivalentes de estimadores. A rigor, haveria ainda que se estudar as propriedades do estimador composto pela relação entre as duas densidades espectrais. Entretanto, tal tarefa transcende o escopo deste texto.

**Comentário 2.3.4 (Escolha da excitação)** *Conforme discutido no Comentário 2.2.2, sempre que for possível, a entrada  $u$  deve ser escolhida de forma a facilitar o problema de identificação e seqüências com características de ruído branco são uma boa escolha. Estas observações também são válidas para a estimativa da resposta em frequência, e uma seqüência  $u$  com características de ruído branco e variância  $\sigma_u^2$  fornece  $\Phi_u(\omega) = \sigma_u^2$ . Com isto, a expressão (2.29) produz  $H(j\omega) = \Phi_{uy}(j\omega)/\sigma_u^2$ , ou seja, a estimativa de  $H(j\omega)$  será proporcional à estimativa de  $\Phi_{uy}(j\omega)$ .*

### 2.3.2.4 Comparação entre os métodos da varredura em frequência e das densidades espectrais

Como primeiro ponto de diferença, note que o método da varredura emprega um sinal de entrada senoidal, enquanto que o método das densidades exige uma entrada com características estocásticas adequadas.

Observe também que o método da varredura possui um mecanismo de eliminação de um eventual ruído que se some ao sinal de saída. A eliminação total exige que o intervalo de mediação seja infinito. Na prática, como o intervalo é finito, pode-se esperar apenas uma redução do efeito do ruído. Da mesma forma, o método das densidades é capaz de eliminar o efeito de um ruído que seja independente da entrada  $u$ , uma vez que, neste caso, a densidade  $\Phi_{uy}(j\omega)$  depende apenas de  $u$  e da componente da saída provocada por  $u$ <sup>6</sup>. Entretanto, esta eliminação de ruído não se dá de maneira exata quando se emprega uma estimativa da densidade espectral obtida de um conjunto finito de observações. Conclui-se que, de uma maneira geral, em qualquer processo de estimação, o conhecimento limitado dos dados está na raiz das imperfeições dos resultados estimados.

Por fim, a escolha de um ou outro método de estimação da resposta em frequência se assenta principalmente em questões de ordem prática. Por exemplo, a possibilidade de se

<sup>6</sup>Esta propriedade de  $\Phi_{uy}(j\omega)$  pode ser constatada lembrando que quando  $u$  é independente do ruído  $\epsilon$  na saída, tem-se que (vide seção 2.2.3)  $r_{ue}(k) = 0$  e  $r_{uy}$  depende apenas de  $u$  e  $y$ . Por fim,  $\Phi_{uy}(j\omega)$  é a transformada de Fourier de  $r_{uy}$ .

testar um sistema com uma entrada do tipo senoidal em contraste com situações onde não se pode impor um tipo de sinal de entrada, mas, ao contrário, é necessário testar o sistema com os sinais típicos de sua operação normal.

## 2.4 Estudo de Caso

O objetivo desta seção é apresentar um experimento de identificação utilizando alguns dos métodos não-paramétricos de identificação apresentados, realizado em um sistema eletro-mecânico translacional<sup>7</sup> disponível no laboratório de graduação da FEEC/UNICAMP.

O sistema dinâmico considerado é constituído por dois carros de massas  $m_1$  e  $m_2$ , atrito viscoso com coeficientes  $b_1$  e  $b_2$  e molas com constantes de Hooke com valores  $k_1$  e  $k_2$ , na configuração representada na Figura 2.4. A entrada  $u(t)$  é definida em Volts e o motor acoplado a uma cremalheira produz uma força correspondente. A saída  $y(t)$  é definida em counts, uma unidade própria dos sistemas ECP. O ganho de hardware  $k_{hw}$  inclui os ganhos correspondentes à transmissão mecânica e ao uso da unidade counts.

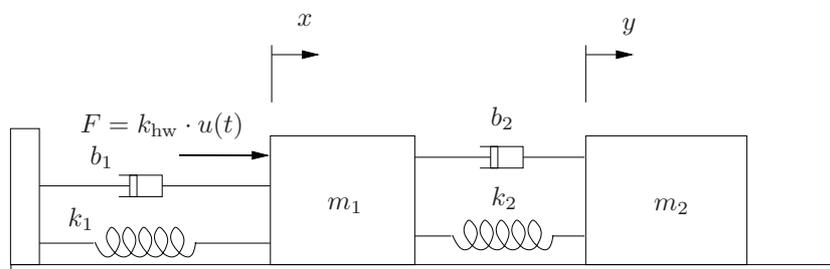


Figura 2.4: Entrada  $u(t)$  e saída  $y(t)$  – posição do carro #2;  $k_{hw}$  – ganho de hardware.

A entrada foi produzida por um sinal com 923 pulsos de PRBS, com duração de 20ms cada um, de forma que o ensaio consistiu na aplicação e coleta do sinal de entrada e de posição  $y$  do carro #2 durante um período de 18,46s. Para os resultados dos métodos temporais da resposta ao impulso e da correlação coletou-se os dados amostrando-se com um período de 22,1 ms. Para os métodos freqüenciais utilizou-se a coleta com período de 4,4 ms.

Os resultados obtidos para os métodos temporais estão representados nas Figuras 2.5 e 2.6 para os métodos da convolução finita e das correlações, respectivamente.

As figuras apresentam três curvas de resposta ao impulso. A primeira delas é a resposta ao impulso obtida da função de transferência linear associada ao modelo de 4a. ordem determinado através das medidas das grandezas físicas—massas, coeficientes de atrito, constante das molas e ganho de hardware. Antes de conduzir experimentos no sistema eletro-mecânico propriamente dito, aplicaram-se os métodos não paramétricos ao modelo linear descrito, obtendo-se assim a segunda curva. Finalmente aplicaram-se os métodos ao sistema eletro-mecânico em laboratório, obtendo-se a terceira curva. Este procedimento permite distinguir-se visualmente a disparidade entre os resultados dos métodos aplicados ao modelo exato linear, daquelas produzidas adicionalmente, por características não modeladas presentes no sistema físico.

Apesar de matematicamente equivalentes, verificamos pelas figuras que os resultados dos métodos da convolução finita e das correlações são distintos, com ligeira vantagem

<sup>7</sup>Rectilinear System ECP-210a, fornecido pela ECP Systems.

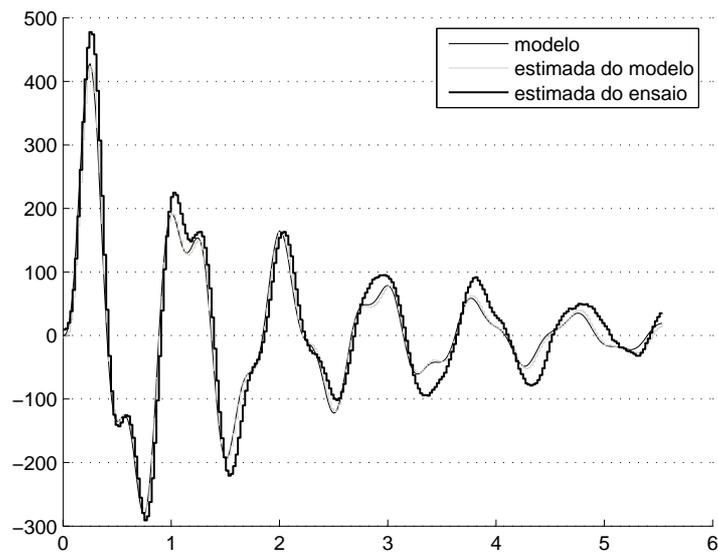


Figura 2.5: Resposta ao impulso utilizando o modelo linear, aplicando-se o método da convolução finita ao modelo e o mesmo método aplicado ao sistema da Figura 2.4.

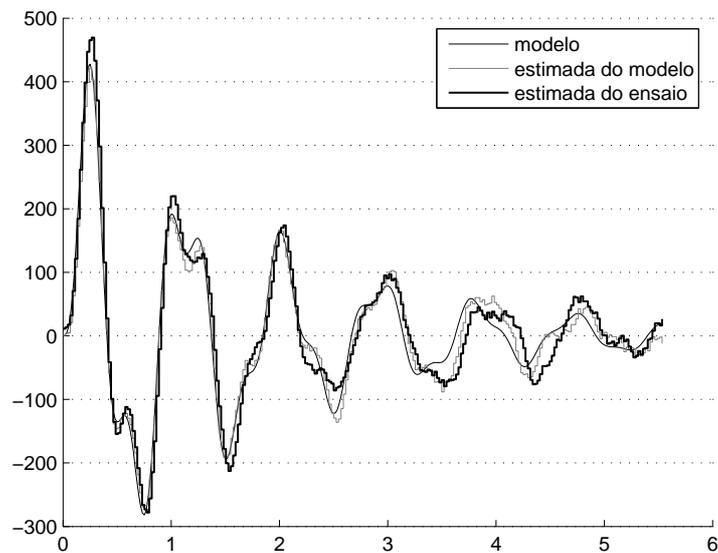


Figura 2.6: Resposta ao impulso utilizando o modelo linear, aplicando-se o método das correlações ao modelo e o mesmo método aplicado ao sistema da Figura 2.4.

para o primeiro. A razão é que eles originam procedimentos numéricos distintos, como foi observado nas seções 2.2.2 e 2.2.3.

Os resultados obtidos para o método das densidades espectrais, em particular com o Periodograma de Welch, estão representados na Figura 2.7. Da mesma forma que para os métodos temporais, são apresentadas três curvas, embora a ordem de apresentação seja

distinta: a segunda curva é a resposta em frequência obtida da função de transferência linear associada ao modelo de 4a. ordem; a primeira curva é a estimativa da resposta em frequência do modelo obtida através do Periodograma de Welch; por fim, a terceira curva foi obtida aplicando o Periodograma de Welch aos resultados dos experimentos no sistema eletro-mecânico.

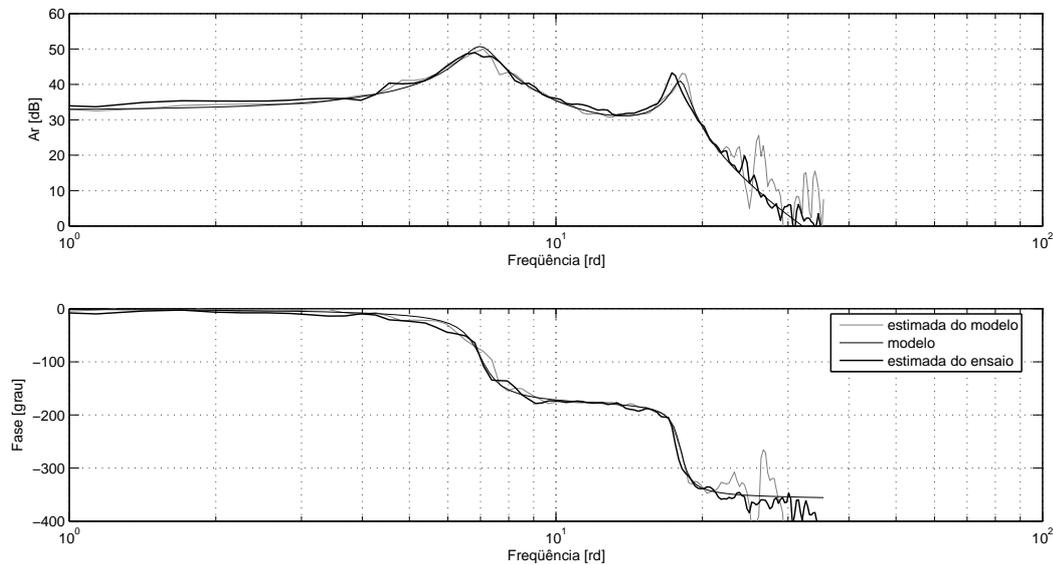


Figura 2.7: Resposta em frequência utilizando o Periodograma de Welch, aplicando-se o método ao modelo e aos dados colhidos do sistema da Figura 2.4.

## 2.5 Comentários gerais

**Comentário 2.5.1 (Condições iniciais)** *Os métodos não-paramétricos estimam a resposta ao impulso ou a resposta em frequência. Portanto, se aplicam apenas a sistemas lineares invariantes no tempo e com condições iniciais nulas. A exigência de condição inicial nula é explícita no método da resposta ao degrau. Já nos demais métodos, as observações da entrada e da saída ocorrem sob regime permanente. Este regime é do tipo senoidal no caso do método da varredura e do tipo estocástico estacionário nos demais.*

**Comentário 2.5.2 (Comprimento da resposta ao impulso)** *Todos os métodos de identificação não-paramétricos exigem que a resposta ao impulso tenha comprimento finito  $J$  ou que a mesma seja truncada em um valor  $J$  no caso do sistema possuir pólos fora da origem do plano complexo. Esta observação é bastante nítida no caso dos métodos temporais: para o método da resposta ao degrau,  $J$  é diretamente condicionado pelo tempo de observação, ao passo que nos métodos da convolução finita e das correlações,  $J$  é condicionado pelo número de colunas de uma matriz. Porém, no caso dos métodos em frequência, esta limitação ocorre de forma mais sutil. Estes métodos devem estimar a resposta em frequência em alguns pontos do eixo de frequência. Qual seria um critério adequado para definir tais pontos? Um critério é assegurar a possibilidade de se calcular a resposta ao impulso correspondente. No caso discreto, esta resposta é obtida através da transformada discreta de Fourier inversa, o que exige (Oppenheim & Schaffer 2000) que a resposta ao impulso*

tenha comprimento finito  $J$  e que  $H(j\omega)$  seja obtida em pontos regularmente espaçados com intervalo  $\Delta\omega \leq 2\pi/J$ . Portanto, segundo este critério,  $J$  deve ser finito.

**Comentário 2.5.3 (Aumento da qualidade das estimativas)** Considerando o caso em que a resposta ao impulso tem comprimento finito  $J$ , os métodos não-paramétricos permitem obter resultados com qualidade crescente através de procedimentos assintóticos, desde que certas condições sejam asseguradas. Porém, a forma destes procedimentos não é mesma para todos os métodos. Observe que a qualidade da estimativa pelo método da resposta ao degrau melhora com o aumento do número de repetições. Entretanto, no caso dos métodos da convolução finita e das correlações, bem como no método da varredura, a qualidade pode ser melhorada aumentando-se o tempo de observação. Por fim, no método das densidades espectrais, não basta aumentar o tempo de observação ou o número de repetições isoladamente. Tomando o Periodograma Mediado expresso em (2.34) como referência, é necessário que tanto o tempo de observação como o número de repetições aumentem.

**Comentário 2.5.4** A idéia de se excitar o sistema através de sinais do tipo ruído branco ou PRBS é importante para os métodos da convolução finita e das correlações. Quando a resposta ao impulso do sistema é infinita e portanto, introduz-se truncamento ao se escolher o número  $J + 1$  para o tamanho do vetor da resposta ao impulso, a seqüência  $\{\epsilon(k)\}_{k \geq 0}$  irá conter esses resíduos e será correlacionada à seqüência de entrada  $\{u(k)\}_{k \geq 0}$ . Ainda assim, a condição 1. no Comentário 2.2.1 poderá ser atendida caso a seqüência de entrada seja i.i.d. (independente e identicamente distribuída) produzindo uma seqüência ruído branco.

**Comentário 2.5.5** Associada à idéia da inversão da matriz  $R$  de amostras da FAC da entrada  $u$ , pode-se analisar a questão de escolha do sinal de excitação do ponto de vista numérico. A indicação é que a matriz  $R$  deva ser do tipo diagonal dominante para se garantir a inversibilidade de  $R$ , e neste sentido a entrada de ruído branco será condizente com esta exigência, produzindo uma matriz diagonal estrita. Esta análise veda por exemplo o uso dos sinais de excitação periódicos por gerarem FAC's também periódicas.

# Referências Bibliográficas

- Aguirre, L. A. (2004). *Introdução À Identificação de Sistemas*, Editora UFMG, Belo Horizonte.
- Jenkins, G. M. & Watts, D. G. (1968). *Spectral Analysis and its Applications*, Holden-Day, San Francisco-USA.
- Karlin, S. & Taylor, H. M. (1975). *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York.
- Kay, S. M. (1988). *Modern Spectral Estimation - Theory and Application*, Prentice Hall Signal Processing Series, Englewood Cliffs, NJ.
- Ljung, L. (1999). *System Identification, Theory for the User*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- Oppenheim, A. V. & Schaffer, R. W. (2000). *Discrete-time signal processing*, 2nd edn, Prentice Hall, New Jersey-USA.
- Söderström, T. & Stoica, P. (1989). *System Identification*, Prentice Hall Systems and Control Series, London, UK.
- Stoica, P. & Moses, R. L. (1997). *Introduction to Spectral Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey-USA.

# Índice Remissivo

- convergência com probabilidade 1, 6
- convolução, 4
- convolução finita, 7
- Correlograma, 18
- Correlograma de Blackman e Tukey, 19, 20
- covariância do Periodograma, 16
  
- densidades espectrais, 12, 14
  
- entrada acessível, 4
- equação de Wiener-Hopf, 9
- estimador de correlação, 9, 19
- estimativa empírica da resposta em frequência, 15
  
- frequência normalizada, 12
- função de autocorrelação, 9
- função de correlação cruzada, 9
  
- intervalos de confiança, 17
  
- janela de Bartlett, 15
- janela de Blackman, 17
- janela retangular, 16
- janelas, 18
  
- métodos freqüenciais, 3
- métodos não-paramétricos, 3
- métodos paramétricos, 3
- métodos temporais, 3
- mínimos quadrados, 8
  
- Periodograma, 14
- Periodograma de Welch, 17, 20
- Periodograma Mediado, 16
- perturbação, 4
- polarização do Periodograma, 15
- PRBS, 11, 24
- processo ergódico, 6
- processo estacionário, 5
- processo estocástico, 5
- propriedades assintóticas, 10
  
- repetição de ensaios, 4, 6
  
- resolução espectral, 16, 17
- resposta ao degrau, 5
- resposta ao impulso, 3, 4, 7, 23
- resposta ao impulso finita, 7
- resposta em frequência, 3, 12, 23
- ruído branco, 4, 20, 24
  
- saída observada, 4
- sinais binários pseudo-aleatórios, 11
- sinal persistentemente excitante, 11
  
- varredura em frequência, 12, 13