Solução estacionária do filtro de Kalman e observabilidade

João B. R. do Val

Depto. de Telemática – FEEC – UNICAMP

16 de outubro de 2019

FullScreen Next

EQUAÇÃO MATRICIAL DE RICCATI:

- Sistema Invariante no tempo: matriz dinâmica $F(k) = F$, matriz de entradas do sistema $G(k) = G$, matriz de observação (ou medida) $H(k) = H$, covariância do sistema $Q(k) = Q$ e covariância da observação $R(k) = R$.

Compondo as equações da matrizes de covariância $P_{k|k}$ e $P_{k+1|k}$,

$$\begin{cases} P_{k|k-1} = FP_{k-1|k-1}F^{\intercal} + Q \\ P_{k|k} = P_{k|k-1} - P_{k|k-1}H^{\intercal}(HP_{k|k-1}H^{\intercal} + R)^{-1}HP_{k|k-1} \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ fazendo substituição e denotando simplificadamente $P_{k|k-1}$ por P_k, obtêm-se a equação Matricial de Riccati para o KF:

$$P_{k+1} = F(P_k - P_kH^{\intercal}(HP_kH^{\intercal} + R)^{-1}HP_k)F^{\intercal} + Q \tag{1}$$

EQUAÇÃO MATRICIAL DE RICCATI:

- Perguntas:

1. Dado $P_0 \geq 0$, seria possível que $\lim_{k\to\infty} P_k = P \geq 0$, que seria solução da equação

$$P = F(P - PH^{\intercal}(HPH^{\intercal} + R)^{-1}HP)F^{\intercal} + Q \qquad (2)$$

2. Será a solução P em (2) acima única, ou seja qualquer que seja $P_0 \geq 0$ a recorrência matricial em (1) converge sempre para o mesmo valor?

3. Considerando o ganho de Kalman $W = PH^{\intercal}S^{-1}$ com $S = R + HPH^{\intercal}$, e a notação $\hat{x}_{k|k} = \widehat{x}_k$ e $\hat{x}_{k|k-1} = \overline{x}_k$, a equação de estimação do filtro pode ser re-escrita como:

$$\begin{aligned}
\widehat{x}_{k+1} &= \overline{x}_{k+1} + W\nu_{k+1} \\
&= F\widehat{x}_k + Gu_k + W(z_{k+1} - H\overline{x}_{k+1}) \\
&= (F - WHF)\widehat{x}_k + (G - WHG)u_k + Wz_{k+1}
\end{aligned}$$

EQUAÇÃO MATRICIAL DE RICCATI:

ou ainda

$$\begin{aligned}\overline{x}_{k+1} &= F\widehat{x}_k + Gu_k \\ &= F(\overline{x}_k + W\nu_k) + Gu_k \\ &= (F - FWH)\overline{x}_k + Gu_k + FWz_k\end{aligned}$$

e será possível que $F - FWH$ seja estável, implicando que o filtro de Kalman será estável, ainda que o sistema dinâmico indicado por F não seja estável?

PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO MATRICIAL DE RICCATI:

Fato 1. Considere (1) e $P_0 = \epsilon I$; então $P_k \leq P_{k+1}$ para todo $k > 0$.

Subtraindo-se (1) expressas em dois instantes subsequentes tem-se que:

$$P_{k+2} - P_{k+1} = (F - W_{k+1}H)(P_{k+1} - P_k)(F - W_{k+1}H)^\mathsf{T} + \\ + (W_{k+1} - W_k)S_k(W_{k+1} - W_k)^\mathsf{T}$$

em que $S_k = HP_kH^\mathsf{T} + R$.

PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO MATRICIAL DE RICCATI: FATO 1

- Prova do Fato 1 De (1),

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= FP_kF^\intercal - FP_kH^\intercal(HP_kH^\intercal + R)^{-1}HP_kF^\intercal + Q \\ &= (F - W_kH)P_k(F - W_kH)^\intercal + W_kR^\intercal W_k^\intercal + Q \end{aligned}$$

com

$$W_k = FP_kH^\intercal[HP_kH^\intercal + R]^{-1} \text{ (ganho de Kalman, versão 2!)}$$

Agora, avaliamos diferenças sucessivas,

$$\begin{aligned} P_{k+2} - P_{k+1} &= (F - W_{k+1}H)(P_{k+1} - P_k)(F - W_{k+1}H)^\intercal \\ &+ (F - W_{k+1}H)P_k(F - W_{k+1}H)^\intercal \\ &- (F - W_kH)P_k(F - W_kH)^\intercal \\ &+ W_{k+1}R^\intercal W_{k+1}^\intercal - W_kR^\intercal W_k^\intercal \end{aligned}$$

PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO MATRICIAL DE RICCATI: FATO 1

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
P_{k+2} - P_{k+1} &= (F - W_{k+1}H)(P_{k+1} - P_k)(F - W_{k+1}H)^\intercal \\
&\quad - W_{k+1}HP_kF^\intercal - FP_kH^\intercal W_{k+1}^\intercal + W_{k+1}HP_kH^\intercal W_{k+1} \\
&\quad + W_kHP_kF^\intercal + FP_kH^\intercal W_k^\intercal - W_kHP_kH^\intercal W_k \\
&\quad + W_{k+1}RW_{k+1}^\intercal - W_kRW_k^\intercal \\
&= (F - W_{k+1}H)(P_{k+1} - P_k)(F - W_{k+1}H)^\intercal \\
&\quad - W_{k+1}\Pi_kW_k^\intercal - W_k\Pi_kW_{k+1}^\intercal + W_{k+1}\Pi_kW_{k+1}^\intercal \\
&\quad + W_k\Pi_kW_k^\intercal + W_k\Pi_kW_k^\intercal - W_k\Pi_kW_k^\intercal \\
&= (F - W_{k+1}H)(P_{k+1} - P_k)(F - W_{k+1}H)^\intercal \\
&\quad + (W_{k+1} - W_k)\Pi_k(W_{k+1} - W_k)^\intercal \geq 0
\end{aligned}$$

em que representamos $\Pi_k = [HP_kH^\intercal + R]$.

Portanto, se $P_0 = \epsilon I$, então $P_1 = \epsilon(F - W_0H)(F - W_0H)^\intercal + W_0R^\intercal W_0^\intercal + Q \geq \epsilon I = P_0$ portanto, $P_1 - P_0 \geq 0$.

Segue por indução que $\cdots P_k \leq P_{k+1} \leq \cdots$ e o fato 1 está provado.

PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO MATRICIAL DE RICCATI: FATO 2

Fato 2. Suponha que o par (F, H) seja observável. Então existe matriz $\Pi > P_k$ para todo $k > 0$.

- Prova do Fato 2:

Considere o sistema determinístico

$$x_{k+1} = F x_k$$
$$z_k = H x_k$$

assim, $x_k = F^k x_0$ e $z_k = H F^k x_0$. Empilhando:

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} x_0$$

a matriz a direita é matriz de observabilidade $\mathcal{O}$.

PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO MATRICIAL DE RICCATI: FATO 2

Para se obter a condição inicial a partir das observações z, considere $M = \mathcal{O}^\intercal \mathcal{O}$, então

$$M^{-1}\mathcal{O}^\intercal \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = x_0$$

$\rightsquigarrow$ Escrevendo agora o sistema linear estocástico no $k+i$,

$$x_{k+i} = F^i x_k + \Gamma(i)\varepsilon^{k,i}$$
$$z_{k+i} = HF^i x_k + H\Gamma(i)\varepsilon^{k,i} + \omega_{k+i}$$

e pré-multiplicando por $(HF^i)^\intercal$ cada termo acima e somando $i = 0, \ldots, n-1$,

$$\sum_{i=0}^{n-1}(F^i)^\intercal H^\intercal z_{k+i} = \sum_{i=0}^{n-1}(F^i)^\intercal H^\intercal HF^i x_k + \sum_{i=0}^{n-1}(F^i)^\intercal H^\intercal H\Gamma(i)\nu^{k,i} + \sum_{i=0}^{n-1}(F^i)^\intercal H^\intercal H\omega_{k+i}$$
$$= \mathcal{O}^\intercal \mathcal{O} x_k + \sum_{i=0}^{n-1}(F^i)^\intercal H^\intercal H\Gamma(i)\nu^{k,i} + \sum_{i=0}^{n-1}(F^i)^\intercal H^\intercal H\omega_{k+i}$$

PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO MATRICIAL DE RICCATI: FATO 2

E assim,

$$\mathrm{cov}(x_k) \leq M^{-1}[\mathsf{cov}\Big(\sum_{i=0}^{n-1}(F^i)^\intercal H^\intercal H\Gamma(i)\nu^{k,i}\Big) + \mathsf{cov}\Big(\sum_{i=0}^{n-1}(F^i)^\intercal H^\intercal H\omega_{k+i}\Big)] = \Pi$$

e como $P_k \leq \mathrm{cov}(x_k)$, mostramos que $P_k \leq \Pi$ para todo k. □

⇝ Até aqui temos que se $P_0 = \epsilon I$, então $P_0 \leq P_1 \leq \cdots \leq P_k \leq \Pi$ do fato que (F, H) é um par observável. Convergência da sequência $P_k, k = 0, 1, \ldots$ se verifica, pois considere vetores coordenados

$$e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (1 somente na j-ésima posição)}$$

⇝ Assim $e_j^\intercal P_k e_j$ é crescente e limitado acima por $e_j^\intercal \Pi e_j$, e todos os elementos diagonais convergem.

PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO MATRICIAL DE RICCATI: FATO 2

⇝ Para elementos fora da diagonal, a conclusão segue tomando

$$(e_j + e_\ell)^\intercal P_k (e_j + e_\ell)$$

Então no limite, $P_k \nearrow P$ que satisfaz a equação algébrica de Riccati (EAR)

$$P = F(P - PH^\intercal(HPH^\intercal + R)^{-1}HP)F^\intercal + Q$$

Se pudermos mostrar que para qualquer $P_0 = \delta I$, $\delta > 0$ temos a convergência $P_k \searrow P$, então seque que para qualquer $P_0 \geq 0$ temos que $P_k \to P$ pois

$$P \nwarrow \epsilon I \leq P_0 \leq \delta I \searrow P \tag{3}$$

Segue também que que a equação algébrica de Riccati terá uma única solução na classe de matrizes semipositiva definida.

PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO MATRICIAL DE RICCATI: ESTABILIDADE

Fato 3. Suponha que o par (F, H) seja observável, $(F, Q^{1/2})$ seja controlável e $R > 0$. Então $F - WH$ com $W = FPH^\intercal S^{-1}$ é estável, e $P > 0$ é a solução única de (2).

- Prova do Fato 3: Supondo que (F, H) seja observável, $(F, Q^{1/2})$ seja controlável e $R > 0$. Suponha que $(F - WH)$, não seja estável, isto é existe λ e v tal que

$$(F - WH)^\intercal v = \lambda v, \text{ com } |\lambda| \geq 1$$

Considerando a EAR

$$\begin{aligned}
P &= F(P - PH^\intercal(HPH^\intercal + R)^{-1}HP)F^\intercal + Q \\
&= F(P - PH^\intercal S^{-1}HP)F^\intercal + Q \\
&= FPF^\intercal - (FPH^\intercal S^{-1})(HPH^\intercal + R)(S^{-1}HPF^\intercal) + Q \\
&= (F - WH)P(F - WH)^\intercal + WRW^\intercal + Q
\end{aligned}$$

PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO MATRICIAL DE RICCATI: ESTABILIDADE

Considerando o autovetor v, e prémultiplicando por $v^\intercal$ e pósmultiplicando por v,

$$v^\intercal P v = |\lambda|^2 v^\intercal P v + v^\intercal W R W^\intercal v + v^\intercal Q v \geq |\lambda|^2 v^\intercal P v$$

e a única possibilidade é que $|\lambda|^2 = 1$, e além disso,

$$(F - WH)^\intercal v = v;\ W^\intercal v = 0;\ Q^{1/2} v = 0$$

ou ainda

$$F^\intercal v = v;\ Q^{1/2} v = 0 \Rightarrow v^\intercal (Q^{1/2}\, F Q^{1/2} \cdots F^{n-1} Q^{1/2}) = 0$$

o que contradiz o fato que o par $(F, Q^{1/2})$ é controlável, portanto

$$F - WH = F - FPH^\intercal S^{-1} \text{ é estável.}$$