

# Capítulo 9

## Controladores Adaptativos

### 9.1 Introdução

Conforme já descrito anteriormente a lei de controle é obtida otimizando um critério de desempenho. Esse critério, como no capítulo anterior, é normalmente descrito por uma função de custo que deve ser minimizada em cada instante de tempo ou ao longo de um horizonte de tempo. Essa minimização resulta em uma lei de controle que, em geral, depende dos parâmetros do sistema tornando assim necessária a identificação do processo a ser controlado. Desse modo o algoritmo desejado deve satisfazer a lei de controle e, estimar os parâmetros do sistema a ser controlado. Conforme descrito no capítulo anterior, a solução desse problema recai no conceito de controle dual. O controle dual é a solução ótima do problema

quando a função de custo é minimizada ao longo de um horizonte de tempo. Conforme já descrito, ele considera a incerteza da estimação no cálculo da lei de controle e, além disso, excita o sistema para melhorar a estimação dos parâmetros do modelo. Contudo, devido a sua complexidade e o esforço computacional requerido para essa solução, apenas casos simples são resolvidos na literatura. O problema é simplificado quando a função de custo minimizada não considera que serão disponíveis medidas em instantes futuros. A minimização de um critério desse tipo resulta no controlador cauteloso, que inclui na lei de controle as incertezas da estimação. Nesse tipo de controlador pode ocorrer o fenômeno de desligamento do controle. Finalmente a alternativa mais simples é a de utilizar os parâmetros estimados no lugar dos parâmetros desconhecidos do modelo do sistema. Essa estratégia é denominada como equivalência certa e em geral é subótima. Essa área de pesquisa teve um grande desenvolvimento com a introdução do regulador auto-ajustável por Astrom e Wittenmark.

O controlador auto-ajustável tem a estrutura indicada na Fig. 9.1. Como identificador utiliza um método de estimação (mínimos quadrados) e, a lei de controle é obtida pela minimização de uma função de custo ou por alocação dos polos do sistema em malha fechada. Para o compor-

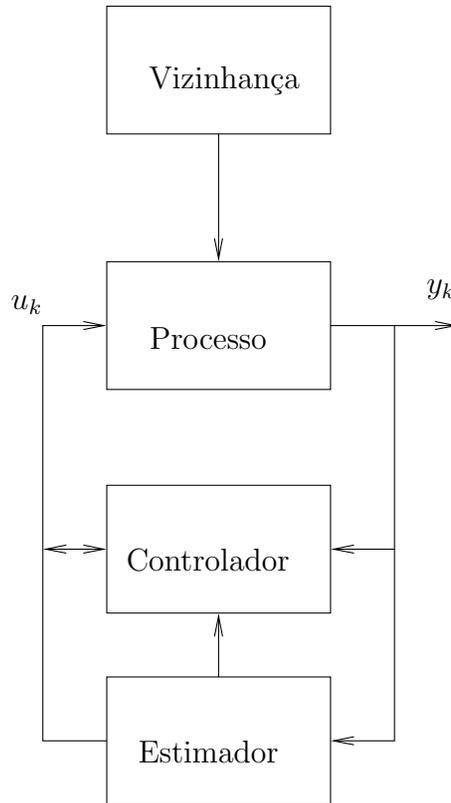


Figura 9.1: Controlador Auto-ajustável

tamento do sistema em malha fechada devem ser considerados o aspecto servo e o de regulação.

## 9.2 Modelo do Processo

Supõe-se que o sistema seja modelado por:

$$A(q^{-1})y_k = q^{-d}B(q^{-1})u_k + C(q^{-1})w_k$$

onde  $y_k, u_k$  são a saída e a entrada do processo e  $w_k$  é a perturbação atuando no processo. O atraso de transporte  $d$  é um múltiplo do intervalo de amostragem.

### 9.3 Posicionamento dos Polos do Sistema em Malha Fechada

Seja o seguinte esquema de controle:

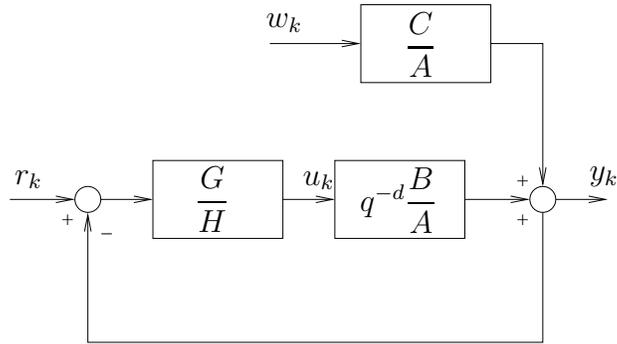


Figura 9.2: Esquema de Controle

A saída do sistema em malha fechada é dada por:

$$y_k = \frac{\frac{G}{H}q^{-d}\frac{B}{A}}{1 + \frac{G}{H}q^{-d}\frac{B}{A}}r_k + \frac{\frac{C}{A}}{1 + \frac{G}{H}q^{-d}\frac{B}{A}}w_k$$

$$y_k = \frac{q^{-d}BG}{AH + q^{-d}BG}r_k + \frac{CH}{AH + q^{-d}BG}w_k$$

$$u_k = \frac{AG}{AH + q^{-d}BG}r_k - \frac{CG}{AH + q^{-d}BG}w_k$$

A lei de controle é obtida especificando-se os polos do sistema em malha fechada, isto é, resolve-se a seguinte identidade polinomial:

$$A(q^{-1})H(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})G(q^{-1}) = T(q^{-1}) \quad (9.1)$$

Nessa equação as raízes do polinômio  $T(q^{-1})$  especificam os polos do sistema em malha fechada. A seguir determina-

se o ordem dos polinômios  $G, H$  para que a equação (9.1) tenha solução.

## 9.4 Solução da Equação Polinomial

$$AX + BY = T \quad (9.2)$$

com  $A, B, T$  dados

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = 1 + b_1q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb}$$

$$T(q^{-1}) = 1 + t_1q^{-1} + \dots + a_{nt}q^{-nt}$$

e os polinômios  $X, Y$  na seguinte forma:

$$X(q^{-1}) = x_0 + x_1q^{-1} + \dots + x_{nx}q^{-nx}$$

$$Y(q^{-1}) = y_0 + y_1q^{-1} + \dots + y_{ny}q^{-ny}$$

Seja  $s = \sup(na + nx; nb + ny, nt)$

O número de equações em (9.2) é dado por

$$ne = s + 1$$

e o número de incógnitas em (9.2) é dado por:

$$ni = nx + ny + 2$$

Para a existência de solução deve-se ter:

$$ni \geq ne$$

Supondo  $s = nb + ny$  tem-se que:

$$\begin{aligned} nx + ny + 2 &\geq nb + ny + 1 \\ nx &\geq nb - 1 \end{aligned} \tag{9.3}$$

Como por hipótese tem-se que:

$$nb + ny \geq na + nx \geq na + nb - 1$$

logo

$$ny \geq na - 1 \tag{9.4}$$

Obs: Considerando-se  $s = na + nx$  ou  $s = nt$  obtêm-se as mesmas condições descritas pelas equações (9.4) e (9.3). Portanto para a existência de solução deve-se ter que:

$$nx \geq nb - 1$$

e

$$ny \geq na - 1$$

Supondo que a equação (9.2) é regular, isto é:

$$nt < na + nb$$

tem-se que:

$$n_{ax} \geq na + nb - 1$$

$$n_{by} \geq na + nb - 1$$

e

$$nt \leq na + nb - 1$$

**Teorema 9.1:** Quando a equação (9.2) é regular, a solução mínima para  $X$ ;  $(nx = nb - 1)$  implica em solução mínima

para  $Y$ ; ( $ny = na - 1$ ).

Prova: Se

$$nx = nb - 1$$

$$n_{ax} = na + nb - 1$$

Como

$$BY = T - AX$$

$$n_{by} = nb + ny \leq \sup(nt, n_{ax})$$

$$n_{by} \leq \sup(nt, na + nb - 1) \leq na + nb - 1$$

logo

$$ny \leq na - 1$$

Pela existência de solução tem-se que:

$$ny \geq na - 1$$

logo

$$ny = na - 1$$

A utilização do teorema 7.1 no sistema descrito pela equação (9.1) resulta em:

$$A(q^{-1})H(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})G(q^{-1}) = T(q^{-1})$$

supondo  $na = nb = n$  resulta que:

$$n_H = n + d - 1$$

$$n_G = n - 1$$

### 9.4.1 Sistema de Fase Mínima

Seja o problema servo (função de transferência entre a referência e a saída) e suponha que o polinômio  $H$  seja dado por  $H = BF$ , isto é, o polinômio  $H$  contém os zeros do sistema em malha aberta ( $B$ ).

$$\frac{y_k}{r_k} = \frac{q^{-d}BG}{AH + q^{-d}BG} = \frac{q^{-d}G}{AF + q^{-d}G}$$

$$AF + q^{-d}G = T$$

$$n_F = d - 1$$

$$n_G = n - 1$$

Nesse caso os zeros do sistema em malha aberta são cancelados. Assim essa abordagem pode ser utilizada para sistemas de fase mínima ou que não tenham zeros "próximos" do círculo unitário.

### 9.4.2 Sistema de Fase Não-Mínima

Seja  $B = B^E B^I$ , onde as raízes de  $B^I$  são os zeros de fase não mínima. Neste caso o polinômio  $H$  é dado por:

$$H = FB^E$$

A função de transferência em malha fechada é dada por :

$$\frac{y_k}{r_k} = \frac{q^{-d}B^I B^E G}{AFB^E + q^{-d}B^E B^I G} = \frac{q^{-d}B^I G}{AF + q^{-d}B^I G}$$

E a equação de alocação de polos torna-se:

$$AF + q^{-d}B^I G = T$$

### 9.4.3 Exemplos

a) Sistema de fase mínima

Seja o processo dado por

$$A(q^{-1})y_k = q^{-1}B(q^{-1})u_k + C(q^{-1})w_k$$

onde  $y_k, u_k$  são respectivamente a saída e a entrada do sistema e  $w_k$  é a perturbação atuando no sistema.

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}$$

$$B(q^{-1}) = 0.2 + 0.02q^{-1}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + q^{-1} + 0.13q^{-2}$$

Especificação: Os polos desejados para o sistema em malha fechada são dados por  $0.66 \pm 0.20i$ . Assim o polnômio  $T(q^{-1})$  é :

$$T(q^{-1}) = 1 - 1.3200q^{-1} + 0.4756q^{-2}$$

Solução:

$$H = BF$$

$$AF + q^{-1}G = T$$

$$n_F = d - 1 = 0$$

$$n_G = na - 1 = 1$$

$$1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2} + q^{-1}(g_0 + g_1q^{-1}) = 1 - 1.32q^{-1} + 0.4756q^{-2}$$

Então  $g_0 = 0.18, g_1 = -0.2244$ . Portanto:

$$G = 0.18 - 0.2244q^{-1}$$

$$H = 0.2 + 0.02q^{-1}$$

b) Sistema de Fase não mínima

Seja o sistema dado por:

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.3q^{-1} + 0.4q^{-2}$$

$$B(q^{-1}) = 1 + 1.5q^{-1}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + 0.75q^{-1}$$

$$d = 1$$

A especificação dos polos em malha fechada é a mesma do exemplo anterior. Portanto tem-se que:

$$T(q^{-1}) = 1 - 1.32q^{-1} + 0.4q^{-2}$$

$$B^I(q^{-1}) = 1 + 1.5q^{-1}$$

$$B^E(q^{-1}) = 1$$

$$H(q^{-1}) = F(q^{-1})$$

$$AH + q^{-1}B^I G = T$$

$$n_H = nb + d - 1 = 1$$

$$n_G = na - 1 = 1$$

$$\begin{aligned} (1-1.13q^{-1}+0.4q^{-2})(1+h_1q^{-1})+q^{-1}(1+1.5q^{-1})(g_0+g_1q^{-1}) &= \\ = 1 - 1.32q^{-1} + 0.4756q^{-2} \end{aligned}$$

$$\text{Logo } g_0 = 0.0144; g_1 = 0.0091; h_1 = -0.0344$$

## 9.5 Controlador Auto-Ajustável por Posicionamento de Polos-Algoritmo Explícito

- 1) Especificar  $T(q^{-1})$ ;
- 2) Obter a medida da saída do sistema ( $y_k$ );
- 3) Estimar os parâmetros do modelo

$$A(q^{-1})y_k = q^{-d}B(q^{-1})u_k + C(q^{-1})w_k$$

- 4) Resolver a identidade polinomial

$$A(q^{-1})H(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})G(q^{-1}) = T(q^{-1})$$

- 5) Calcular

$$u_k = \frac{G(q^{-1})}{H(q^{-1})}y_k$$

- 6)  $k = k + 1$ ; voltar ao passo 2

## 9.6 Minimização de um critério

### 9.6.1 Previsão em Modelos ARMA

Do modelo ARMA tem-se que :

$$y_{k+d} = \lambda \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} w_{k+d}$$

Definindo

$$\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} = F(q^{-1}) + q^{-d} \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

com

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{d-1} q^{-d+1}$$

$$G(q^{-1}) = g_0 + g_1 q^{-1} + \dots + g_{n-1} q^{-n+1}$$

logo

$$y_{k+d} = \lambda F(q^{-1}) w_{k+d} + \lambda \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})} w_k$$

$$y_{k+d} = \lambda F(q^{-1}) w_{k+d} + \lambda \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})} \frac{1}{\lambda} \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_k$$

$$y_{k+d} = \lambda F(q^{-1}) w_{k+d} + \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_k$$

$$y_{k+d} = \lambda \{ w_{k+d} + f_1 w_{k+d-1} + \dots + f_{d-1} w_{k+1} \} +$$

$$+ f(y_k, y_{k-1}, \dots) \leftarrow \text{PASSADO}$$

$$\hat{y}_{k+d/k} = \mathcal{E}(y_{k+d}/\underline{y})$$

logo

$$\hat{y}_{k+d/k} = \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_k$$

ou

$$C(q^{-1})\hat{y}_{k+d/k} = G(q^{-1})y_k$$

$$\hat{y}_{k+d/k} + c_1\hat{y}_{k+d-1/k-1} + \dots + c_n\hat{y}_{k+d-n/k-n} = g_0y_k + \dots + g_{n-1}y_{k-n+1}$$

O Erro de Previsão é dado por:

$$e_{k+d} = y_{k+d} - \hat{y}_{k+d/k} = \lambda F(q^{-1})w_{k+d}$$

$$e_{k+d} = \lambda\{w_{k+d} + f_1w_{k+d-1} + \dots + f_{d-1}w_{k+1}\}$$

A Variância do Erro de Previsão é dada por:

$$vare_{k+d} = \lambda^2\{1 + f_1^2 + \dots + f_{d-1}^2\}$$

portanto a variância do erro de previsão cresce à medida que o horizonte de previsão aumenta.

### 9.6.2 Solução da Identidade Polinomial

$$\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} = F(q^{-1}) + q^{-d}\frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

ou

$$C(q^{-1}) = F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1})$$

$$\begin{aligned}
q^{-1} \quad c_1 &= a_1 + f_1 \\
q^{-2} \quad c_2 &= a_2 + a_1 f_1 + f_2 \\
&\vdots \\
q^{-d} \quad c_d &= a_d + a_{d-1} f_1 + \dots + g_0 \\
&\vdots \\
q^{-n} \quad c_n &= a_n + a_{n-1} f_1 + \dots + g_{n-d} \\
q^{-n+1} \quad 0 &= a_n f_{d-1} + \dots + g_{n-d+1} \\
&\vdots \\
q^{-n+d+1} \quad 0 &= a_n f_{d-1} + g_{n-1}
\end{aligned}$$

Que pode ser escrita como:

$$\mathbf{A}x = b$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{d-1} & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n-1} & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & a_n & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^T = ( f_1 \quad \dots \quad f_{d-1} \quad g_0 \quad \dots \quad g_{n-1} )$$

$$b^T = ( c_1 - a_1 \quad \dots \quad c_d - a_n \quad \dots \quad c_n - a_n \quad \dots \quad 0 )$$

Exercício: Obter o preditor de um e dois passos para o seguinte sistema:

$$y_k + 0.7y_{k-1} + 0.1y_{k-2} = w_k + 0.4w_{k-1} + 0.03w_{k-2}$$

### 9.6.3 Controle de Variância Mínima

Dado o processo descrito pela equação a seguir, calcule o controle  $u_k$  que minimize a variância da saída.

$$A(q^{-1})y_k = q^{-d}B(q^{-1})u_k + \lambda C(q^{-1})w_k$$

ou

$$y_{k+d} = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_k + \lambda \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}w_{k+d}$$

Objetivo

$$\min_{u_k} \mathcal{E}(y_{k+d})^2$$

Solução:

$$\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} = F(q^{-1}) + q^{-d} \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

logo

$$y_{k+d} = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_k + \lambda F(q^{-1})w_{k+d} + \lambda q^{-d} \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})}w_{k+d}$$

$$y_{k+d} = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_k + \lambda F(q^{-1})w_{k+d} + \lambda \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})}w_k$$

$$\lambda w_k = \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_k - \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})}q^{-d}u_k$$

$$y_{k+d} = \lambda F(q^{-1})w_{k+d} + \left\{ \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} - q^{-d} \frac{B(q^{-1})G(q^{-1})}{A(q^{-1})C(q^{-1})} \right\} u_k + \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_k$$

$$y_{k+d} = \lambda F(q^{-1})w_{k+d} + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u_k + \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_k$$

Desta equação tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(y_{k+d}^2) &= \mathcal{E}(\lambda F(q^{-1})w_{k+d})^2 + \\ &+ 2\mathcal{E}(\lambda F(q^{-1})w_{k+d}) \left( \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_k + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u_k \right) + \\ &+ \mathcal{E} \left\{ \left( \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_k + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u_k \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Como  $w_k$  é uma perturbação branca, tem-se que:

$$\mathcal{E}(y_{k+d}^2) = \mathcal{E}(\lambda F(q^{-1})w_{k+d})^2 + \mathcal{E} \left\{ \left( \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_k + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u_k \right)^2 \right\}$$

Portanto o controle  $u_k$  que minimiza a variância da saída é dado por:

$$\frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_k + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u_k = 0$$

ou

$$u_k = - \frac{G(q^{-1})}{B(q^{-1})F(q^{-1})} y_k$$

A variância do erro é dada por:

$$e_{k+d} = \lambda F(q^{-1})w_{k+d}$$

$$vare_{k+d} = \lambda^2 (1 + f_1^2 + \dots + f_{d-1}^2)$$

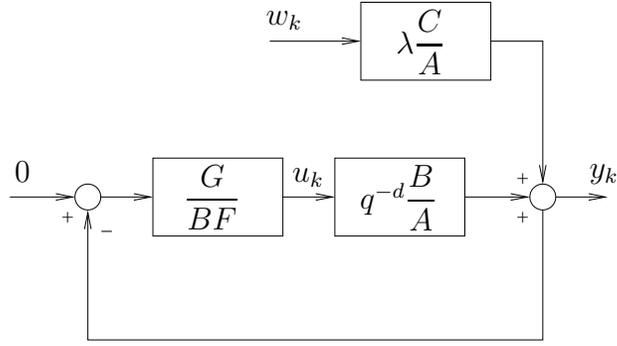


Figura 9.3: Controle de Variância Mínima

#### 9.6.4 Localização dos polos em malha fechada

$$y_k = \frac{q^{-d}G(q^{-1})B(q^{-1})}{A(q^{-1})B(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1})B(q^{-1})}r_k + \frac{\lambda C(q^{-1})B(q^{-1})F(q^{-1})}{A(q^{-1})B(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1})B(q^{-1})}w_k$$

Os polos são as raízes de

$$A(q^{-1})B(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1})B(q^{-1}) = 0$$

Portanto o sistema em malha fechada tem

$$(na + nb + d - 1)$$

polos. Como

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1})$$

tem-se que:

$$y_k = \frac{q^{-d}G(q^{-1})}{C(q^{-1})}r_k + \lambda F(q^{-1})w_k$$

Portanto na função de transferência entre a saída e a perturbação tem-se que  $na + nb$  polos são cancelados e  $d - 1$  estão na origem. Assim um melhor desempenho de regulação (rejeição da perturbação) poderá não fornecer o melhor desempenho servo, pois ele está sendo especificado pelas raízes do polinômio  $C(q^{-1})$ .

O controlador de variância mínima apresenta desempenho degradado para sistemas de fase não-mínima ou quando o sistema apresenta zeros próximos do círculo unitário. Para resolver esse problema uma abordagem consiste em fatorar os zeros do sistema (Vide Astrom). Outra abordagem consiste em alterar o critério a ser otimizado, conforme descrito a seguir.

### 9.6.5 Controle de Variância Mínima Generalizada

Dado o processo descrito pela equação:

$$A(q^{-1})y_k = q^{-d}B(q^{-1})u_k + C(q^{-1})w_k$$

Nesse caso a lei de controle é calculada minimizando o critério descrito pela equação descrita a seguir

$$J = \mathcal{E}\{(P(q^{-1})y_{k+d} - R(q^{-1})r_k)^2 + (Q'(q^{-1})u_k)^2 / I_k\}$$

onde  $I_k$  é a informação disponível no instante  $k$ ,  $r_k$  é o sinal de referência e  $P, R, Q'$  são os polinômios de ponderação.

Inicialmente calcula-se como o sinal de controle influência

a saída  $Py_{k+d}$ . Da equação do modelo tem-se que:

$$Py_{k+d} = \frac{PB}{A}u_k + \frac{PC}{A}w_{k+d}$$

Dessa equação pode-se observar que somente a segunda parcela contém termos independentes das medidas realizadas até o instante de tempo  $k$ . Esses termos podem ser obtidos utilizando uma identidade equivalente à usada na obtenção da lei de controle variância mínima, isso é:

$$\frac{PC}{A} = F + q^{-d}\frac{G}{A}$$

logo

$$Py_{k+d} = \frac{PB}{A}u_k + Fw_{k+d} + \frac{G}{A}w_k$$

O termo  $Fw_{k+d}$  é independente das medidas disponíveis no instante  $k$ . Supondo que  $\bar{w}_k = 0$  tem-se que a melhor previsão de  $Py_{k+d}$  é dada por:

$$P\hat{y}_{k+d/k} = \frac{PB}{A}u_k + \frac{G}{A}w_k$$

$$Py_{k+d} = P\hat{y}_{k+d/k} + Fw_{k+d}$$

Desenvolvendo-se a equação da previsão da saída resulta:

$$P\hat{y}_{k+d/k} = \frac{PB}{A}u_k + \frac{G}{A}\left\{\frac{A}{C}y_k - q^{-d}\frac{B}{C}u_k\right\}$$

$$P\hat{y}_{k+d/k} = \frac{G}{C}y_k - \frac{B}{A}\left\{P - q^{-d}\frac{G}{C}\right\}u_k$$

$$P\hat{y}_{k+d/k} = \frac{G}{C}y_k + \frac{BF}{C}u_k$$

Utilizando essa previsão o critério a ser otimizado pode ser reescrito como segue:

$$J = \mathcal{E}\{(P\hat{y}_{k+d/k} + Fw_{k+d} - Rr_k)^2 + (Q'u_k)^2/I_k\}$$

$$J = \mathcal{E}((P\hat{y}_{k+d/k} - Rr_k)^2/I_k) + 2\mathcal{E}(Fw_{k+d}(P\hat{y}_{k+d/k} - Rr_k)/I_k) + \mathcal{E}((Fw_{k+d})^2/I_k) + \mathcal{E}((Q'u_k)^2/I_k)$$

Dessa equação pode-se observar que:

$$\mathcal{E}(((P\hat{y}_{k+d/k} - Rr_k)^2 + (Q'u_k)^2)/I_k) = (P\hat{y}_{k+d/k} - Rr_k)^2 + (Q'u_k)^2$$

e

$$\mathcal{E}(Fw_{k+d}(P\hat{y}_{k+d/k} - Rr_k)/I_k) = 0$$

e

$$\mathcal{E}((Fw_{k+d})^2/I_k) = (Fw_{k+d})^2$$

Portanto a equação do critério de custo torna-se:

$$J = (P\hat{y}_{k+d/k} - Rr_k)^2 + \mathcal{E}(Fw_{k+d})^2 + (Q'u_k)^2$$

Logo

$$\frac{\partial J}{\partial u_k} = 2(P\hat{y}_{k+d/k} - Rr_k) \frac{\partial(P\hat{y}_{k+d/k} - Rr_k)}{\partial u_k} + 2Q'u_k \frac{\partial(Q'u_k)}{\partial u_k} + \frac{\mathcal{E}(Fw_{k+d})^2}{\partial u_k} = 0$$

Utilizando a equação do modelo do sistema tem-se que:

$$\frac{\partial(P\hat{y}_{k+d/k} - Rr_k)}{\partial u_k} = b_0 f_0 = b_0 p_0$$

$$\frac{\partial(Q' u_k)}{\partial u_k} = q'_0$$

Logo

$$P\hat{y}_{k+d/k} - Rr_k + \frac{q'_0}{b_0 p_0} Q' u_k = 0$$

Seja

$$Q = \frac{q'_0}{b_0 p_0} Q'$$

então

$$P\hat{y}_{k+d/k} - Rr_k + Qu_k = 0$$

A previsão da saída pode ser reescrita em função das medidas disponíveis no instante de tempo  $k$ .

$$P\hat{y}_{k+d/k} = \frac{G}{C} y_k + \frac{BF}{C} u_k$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{G}{C} y_k + \frac{BF}{C} u_k + qu_k - Rr_k &= 0 \\ Gy_k + (BF + QC)u_k - RCr_k &= 0 \end{aligned}$$

Sendo  $H = BF + QC$  e  $E = -RC$  tem-se

$$Gy_k + Hu_k + Er_k = 0$$

ou

$$u_k = -\frac{Gy_k + Er_k}{H}$$

que é a lei de controle de variância mínima generalizada.  
Observações: 1) Quando  $Q' = 0$  e  $R = 0$  recai-se no

problema de variância mínima ;2) Quando  $Q' = 0$  o controle de variância mínima generalizada coincide com o controle por modelo de referência.

### 9.6.6 Controlador Auto-Ajustável-Algoritmo Explícito(Indireto)

- 1) Estimar os parâmetros do modelo do sistema.  $(A, B, C)$
- 2) Resolver a identidade polinomial

$$\frac{PC}{A} = F + q^{-d} \frac{G}{A}$$

- 3) Calcular

$$H = BF + QC$$

$$E = -RC$$

e

$$u_k = -\frac{Gy_k + Er_k}{H}$$

### 9.6.7 Controlador Auto-Ajustável-Algoritmo Implícito(Direto)

Esse algoritmo permite estimar diretamente os parâmetros da lei de controle. Esse procedimento elimina o cálculo dos polinômios  $F$  e  $G$  através da identidade polinomial. Para a obtenção desse algoritmo define-se uma variável auxiliar dada pela seguinte equação:

$$\Phi_{k+d} = Py_{k+d} + Qu_k - Rr_k$$

$$\Phi_{k+d} = P\hat{y}_{k+d/k} + \epsilon_{k+d} + Qu_k - Rr_k$$

logo a previsão da saída auxiliar é dada por:

$$\hat{\Phi}_{k+d/k} = P\hat{y}_{k+d/k} + Qu_k - Rr_k$$

com

$$\Phi_{k+d} = \hat{\Phi}_{k+d/k} + \epsilon_{k+d}$$

Utilizando o valor da saída prevista tem-se que a previsão da saída auxiliar é dada por:

$$\hat{\Phi}_{k+d/k} = \frac{G}{C}y_k + \frac{BF}{C}u_k + Qu_k - Rr_k$$

$$C\hat{\Phi}_{k+d/k} = Gy_k + (BF + QC)u_k - RCr_k$$

$$C\hat{\Phi}_{k+d/k} = Gy_k + Hu_k - Er_k$$

Conforme deduzido anteriormente, a lei de controle de variância mínima generalizada é obtida anulando o lado direito da ultima equação, assim tem-se que a variável  $\hat{\Phi}_{k+d/k}$  é anulada em cada instante de tempo.

Para se obter diretamente os parâmetros do controlador deve-se estimar os coeficientes dos polnômios  $G$ ,  $H$  e  $E$ . Essa estimação deve ser realizada utilizando-se as medidas disponíveis em cada instante de tempo.

Definindo os vetores:

$$\theta^T = [g_0 g_1 \dots h_0 h_1 \dots e_0 e_1 \dots]$$

$$\varphi_k^T = [y_k y_{k-1} \dots u_k u_{k-1} \dots - r_k - r_{k-1} \dots]$$

A previsão da saída auxiliar pode ser escrita como:

$$\hat{\Phi}_{k+d/k} = \frac{\varphi_k^T \theta}{C}$$

$$\Phi_{k+d} = \frac{\varphi_k^T \theta}{C} + \epsilon_{k+d}$$

ou

$$C\Phi_{k+d} = \varphi_k^T \theta + C\epsilon_{k+d}$$

$$\Phi_{k+d} = \varphi_k^T \theta + C\epsilon_{k+d} + (1 - C)\Phi_{k+d}$$

$$\Phi_{k+d} = \varphi_k^T \theta + \{(1 - C)\hat{\Phi}_{k+d/k} + \epsilon_{k+d}\}$$

Como a lei de controle é obtida anulando, em cada instante de tempo, a previsão da saída auxiliar tem-se que:

$$\Phi_{k+d} = \varphi_k^T \theta + \epsilon_{k+d}$$

Para obter o estimador dos parâmetros desconhecidos deve-se utilizar a informação disponível no instante  $k$ .

Para tanto utiliza-se a equação anterior deslocada de  $d$  instantes de tempo.

$$\Phi_k = \varphi_{k-d}^T \theta + \epsilon_k$$

Como a perturbação  $\epsilon_k$  é não correlata com o vetor  $\varphi_{k-d}^T$ , tem-se que o estimador dos mínimos quadrados é assintoticamente não polarizado e é dado por:

$$\Phi_k = Py_k - Rr_{k-d} + Qu_{k-d}$$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k \{\Phi_k - \varphi_{k-d}^T \hat{\theta}_{k-1}\}$$

$$K_k = S_{k-1} \varphi_{k-d} / (1 + \varphi_{k-d}^T S_{k-1} \varphi_{k-d})$$

$$S_k = S_{k-1} - K_k(1 + \varphi_{k-d}^T S_{k-1} \varphi_{k-d}) K_k^T$$

A lei de controle é calculada por:

$$\hat{\Phi}_{k+d/k} = 0$$

ou

$$\varphi_k^T \theta = 0$$