Capítulo 10

Controlador Preditivo Generalizado (GPC)

10.1 Introdução

Controladores baseados em modelo (*Model-Based Controllers*) têm se mostrado de particular interesse para aplicações industriais, especialmente no contexto de processos químicos de grande porte. Esses controladores caracterizam-se por utilizar previsões do comportamento futuro do sistema controlado para realizar o cálculo da lei ótima de controle com base em um determinado critério de desempenho determinístico ou estocástico. As previsões são obtidas através de um modelo do sistema. A diferença entre as classes distintas de controladores preditivos está basicamente no tipo de modelo adotado. Nas seções seguintes considera-se um dos controladores preditivos mais difundidos na literatura: o Controlador Preditivo Generalizado (GPC)

10.2 Controlador GPC

Suponha que um sistema que se pretenda controlar, por simplicidade e sem perda de generalidade monovariável (SISO), possa ser descrito como:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t-1) \tag{10.1}$$

onde q é o operador deslocamento à frente, $u(t)$ e $y(t)$ são respectivamente a entrada e a saída do sistema no instante discreto de tempo t, $d \geq 0$ é o atraso de tempo e $A(q^{-1})$ e $B(q^{-1})$ são polinômios dados por

$$
\begin{aligned}
A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{N_a} q^{-N_a} \\
B(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{N_b} q^{-N_b}
\end{aligned} \tag{10.2}
$$

O Controlador Preditivo Generalizado (GPC) utiliza um modelo do sistema, conhecido como CARIMA (*Controlled Auto-Regressive Integrating Moving-Average*), que é basicamente uma versão incremental (variacional) da representação dada pela equação (10.1), ou seja:

$$
\tilde{A}(q^{-1})\hat{y}(t) = B(q^{-1})\,\Delta u(t-1) \tag{10.3}
$$

onde $\Delta = (1 - q^{-1})$ e $\tilde{A}(q^{-1}) = \Delta A(q^{-1}) = 1 + \tilde{a}_1 q^{-1} + \cdots + \tilde{a}_{N_{\tilde{a}}} q^{-N_{\tilde{a}}}$, sendo $\tilde{a}_j = a_j - a_{j-1}$ e $N_{\tilde{a}} = N_a + 1$. Note que, nesse modelo, qualquer atraso de tempo deve ser representado através de coeficientes nulos no polinômio $B(q^{-1})$.

O controlador preditivo calcula a seqüência dos sinais de controle futuros[1] $u(t), u(t+1), \cdots\ u(t+N_y-1)$ que minimiza o erro quadrático entre uma seqüência de saída desejada $w(t+1)$,
$\cdots$,$w(t+N_y)$(referência de controle) e as saídas previstas $\hat{y}(t+1), \cdots, \hat{y}(t+N_y)$ no horizonte de previsão N_y. Dos sinais de controle calculados, somente o primeiro, ou seja $u(t)$, é aplicado ao sistema. No instante de tempo seguinte todo o procedimento é repetido, em uma estratégia conhecida como "Receding Horizon". Portanto, a estratégia de controle é constituída das seguintes etapas:

- Cálculo da previsão da saída em um horizonte de tempo à frente, utilizando um modelo do sistema.
- Cálculo da lei de controle minimizando um critério dado por uma função do erro entre a saída prevista e a referência especificada.

O critério a ser minimizado é dado por:

$$
J = \sum_{j=N_1}^{N_y} (\,\hat{y}(t+j\,|t) - w(t+j)\,)^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(\,\Delta u(t+j-1)\,)^2 \tag{10.4}
$$

onde $N_1 \geq 1$ é o horizonte inicial de previsão, N_y é o horizonte de previsão $(N_y \geq N_1)$, N_u é o horizonte de controle $(N_u \leq N_y)$, $\lambda \geq 0$ é a ponderação

[1] Assume-se que no instante t a saída do sistema $y(t)$ é conhecida e deseja-se determinar o valor de $u(t)$, portanto desconhecido.

do sinal de controle e $|t$ indica que as respectivas previsões da saída em instantes futuros são realizadas utilizando as informações disponíveis até o instante presente t. Discussões sobre a influência dos parâmetros de sintonia N_1, N_y, N_u e λ no desempenho do controlador podem ser encontradas em Nazetta(tese de mestrado).

A minimização do critério J é realizada supondo que o sinal de controle a partir do instante $t + N_u - 1$ é mantido constante, ou seja, entre $t + N_u$ e $t + N_y - 1$ o sinal de controle é igual àquele em $t + N_u - 1$. Isso significa que os incrementos do sinal de controle após o instante $t + N_u - 1$, isto é $\Delta u(t + N_u), \Delta u(t + N_u + 1), \cdots, \Delta u(t + N_y - 1)$, são nulos. Dessa forma, o problema de otimização é definido como:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{\Delta u}} \quad J \\ &\text{s. a} \quad \Delta u(k) = 0 \quad k \in [t + N_u, t + N_y - 1] \end{aligned} \tag{10.5}$$

onde $\mathbf{\Delta u} = [\Delta u(t) \cdots \Delta u(t+N_u-1)]^T$. Esse problema é usualmente resolvido a partir da aplicação de uma identidade polinomial (Eq. diofantina) para separar, em cada instante de amostragem, as parcelas livre e forçada da previsão futura da saída do sistema . No entanto, o mesmo resultado pode ser obtido de forma mais simples, como mostrado nas seções seguintes.

10.2.1 Previsão via Cálculo Iterativo do Modelo

Lembrando que dispõem-se das informações do sistema até o instante presente t, particularmente no que diz respeito às medidas da saída y, as melhores previsões possíveis das saídas futuras utilizando o modelo em (10.3) são dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1\,|t) &= -\tilde{a}_1 y(t) - \tilde{a}_2 y(t-1) - \tilde{a}_3 y(t-2) - \cdots \\ &\quad -\tilde{a}_{N_{\tilde{a}}} y(t - N_{\tilde{a}} + 1) + \\ &\quad +B\,\Delta u(t) \\ \hat{y}(t+2\,|t) &= -\tilde{a}_1 \hat{y}(t+1\,|t) - \tilde{a}_2 y(t) - \tilde{a}_3 y(t-1) - \cdots \\ &\quad -\tilde{a}_{N_{\tilde{a}}} y(t - N_{\tilde{a}} + 2) + \\ &\quad +B\,\Delta u(t+1) \\ \hat{y}(t+3\,|t) &= -\tilde{a}_1 \hat{y}(t+2\,|t) - \tilde{a}_2 \hat{y}(t+1\,|t) - \tilde{a}_3 y(t) - \cdots \\ &\quad -\tilde{a}_{N_{\tilde{a}}} y(t - N_{\tilde{a}} + 3) + \\ &\quad +B\,\Delta u(t+2) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{10.6}$$

Das equações acima pode-se verificar que as previsões da saída após o instante t podem ser descritas em função dos incrementos presente e futuros do sinal de controle (desconhecidos) e de acontecimentos ocorridos anteriormente àquele instante. Em outras palavras, a previsão da saída pode ser decomposta em

$$\hat{y} = \hat{y}_l + \hat{y}_f \tag{10.7}$$

onde $\hat{y}_l$ é a previsão da saída em função da *resposta livre* do sistema (isto é, com incrementos presente e futuros de controle nulos) e $\hat{y}_f$ é a previsão da saída em função da *resposta forçada* (isto é, considerando apenas os incrementos presente e futuros do sinal de controle, que devem ser calculados de forma a minimizar o critério de desempenho).

Das equações de previsão anteriores tem-se que

$$\begin{aligned}
\hat{y}(t+1\,|t) =& -\tilde{a}_1 y(t) - \tilde{a}_2 y(t-1) - \cdots - \tilde{a}_{N_{\tilde{a}}} y(t - N_{\tilde{a}} + 1) + \\
& +b_0\,\Delta u(t) + \\
& +b_1\,\Delta u(t-1) + \cdots + b_{N_b}\Delta u(t - N_b) \\
\hat{y}(t+2\,|t) =& -\tilde{a}_1(\,\hat{y}_l(t+1\,|t) + \hat{y}_f(t+1\,|t)\,) - \tilde{a}_2 y(t) - \cdots \\
& -\tilde{a}_{N_{\tilde{a}}} y(t - N_{\tilde{a}} + 2) + \\
& +b_0\,\Delta u(t+1) + b_1\,\Delta u(t) \\
& +b_2\,\Delta u(t-1) + \cdots + b_{N_b}\Delta u(t - N_b + 1) \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{10.8}$$

Logo, a partir das equações acima e das definições de $\hat{y}_l$ e $\hat{y}_f$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_f(t+1\,|t) =& \, b_0\,\Delta u(t) \\
\hat{y}_f(t+2\,|t) =& -\tilde{a}_1 \hat{y}_f(t+1\,|t) + b_0\,\Delta u(t+1) + b_1\,\Delta u(t) \\
\hat{y}_f(t+3\,|t) =& -\tilde{a}_1 \hat{y}_f(t+2\,|t) - \tilde{a}_2 \hat{y}_f(t+1\,|t) + b_0\,\Delta u(t+2) \\
& +b_1\,\Delta u(t+1) + \\
& +b_2\,\Delta u(t) \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{10.9}$$

e

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_l(t+1\,|t) = & -\tilde{a}_1 y(t) - \tilde{a}_2 y(t-1) - \cdots - \tilde{a}_{N_{\tilde{a}}} y(t-N_{\tilde{a}}+1) \\
& +b_1\,\Delta u(t-1) + \cdots + b_{N_b}\Delta u(t-N_b) \\
\hat{y}_l(t+2\,|t) = & -\tilde{a}_1 \hat{y}_l(t+1\,|t) - \tilde{a}_2 y(t) - \cdots - \tilde{a}_{N_{\tilde{a}}} y(t-N_{\tilde{a}}+2) \\
& +b_2\,\Delta u(t-1) + \cdots + b_{N_b}\Delta u(t-N_b+1) \\
\hat{y}_l(t+3\,|t) = & -\tilde{a}_1 \hat{y}_l(t+2\,|t) - \tilde{a}_2 \hat{y}_l(t+1\,|t) - \tilde{a}_3 y(t) - \cdots - \tilde{a}_{N_{\tilde{a}}} y(t-N_{\tilde{a}}+3) \\
& +b_3\,\Delta u(t-1) + \cdots + b_{N_b}\Delta u(t-N_b+2) \\
& \vdots
\end{aligned}
\tag{10.10}
$$

Exemplo

Considere o seguinte sistema:

$$Ay(t) = Bu(t-1) \tag{10.11}$$

com $A = (1 + a_1 q^{-1})$ e $B = (b_0 + b_1 q^{-1})$, ou seja

$$y(t) = -a_1 y(t-1) + b_0 u(t-1) + b_1 u(t-2) \tag{10.12}$$

Na forma incremental, rescreve-se o sistema acima como:

$$y(t) = -\tilde{a}_1 y(t-1) - \tilde{a}_2 y(t-2) + b_0 \Delta u(t-1) + b_1 \Delta u(t-2) \tag{10.13}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\tilde{A} \; & = \Delta A = (1-q^{-1})A = (1-q^{-1})(1+a_1 q^{-1}) = \\
& = (1 + (a_1 - 1)q^{-1} - a_1 q^{-2}) = (1 + \tilde{a}_1 q^{-1} + \tilde{a}_2 q^{-2})
\end{aligned}
\tag{10.14}
$$

Logo, as previsões futuras do sinal de saída são dadas a partir de (10.6) por

$$
\begin{aligned}
\hat{y}(t+1\,|t) \;\; & = \;\; -\tilde{a}_1 y(t) - \tilde{a}_2 y(t-1) + \\
& \;\;\;\;\; +b_0 \Delta u(t) + b_1 \Delta u(t-1) \\
\hat{y}(t+2\,|t) \;\; & = \;\; -\tilde{a}_1 \hat{y}(t+1\,|t) - \tilde{a}_2 y(t) + \\
& \;\;\;\;\; +b_0 \Delta u(t+1) + b_1 \Delta u(t) \\
\hat{y}(t+3\,|t) \;\; & = \;\; -\tilde{a}_1 \hat{y}(t+2\,|t) - \tilde{a}_2 \hat{y}(t+1\,|t) + \\
& \;\;\;\;\; +b_0 \Delta u(t+2) + b_1 \Delta u(t+1) \\
& \vdots
\end{aligned}
\tag{10.15}
$$

e considerando a equação (10.7) tem-se

$$\begin{aligned} \hat{y}_l(t+1\,|t) &= -\tilde{a}_1 y(t) - \tilde{a}_2 y(t-1) + b_1 \Delta u(t-1) \\ \hat{y}_l(t+2\,|t) &= -\tilde{a}_1 \hat{y}_l(t+1\,|t) - \tilde{a}_2 y(t) \\ \hat{y}_l(t+3\,|t) &= -\tilde{a}_1 \hat{y}_l(t+2\,|t) - \tilde{a}_2 \hat{y}_l(t+1\,|t) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{10.16}$$

e

$$\begin{aligned} \hat{y}_f(t+1\,|t) &= b_0 \Delta u(t) \\ \hat{y}_f(t+2\,|t) &= -\tilde{a}_1 \hat{y}_f(t+1\,|t) + b_0 \Delta u(t+1) + b_1 \Delta u(t) \\ &= b_0 \Delta u(t+1) + (b_1 - \tilde{a}_1 b_0) \Delta u(t) \\ \hat{y}_f(t+3\,|t) &= -\tilde{a}_1 \hat{y}_f(t+2\,|t) - \tilde{a}_2 \hat{y}_f(t+1\,|t) + \\ &\quad + b_0 \Delta u(t+2) + b_1 \Delta u(t+1) \\ &= -\tilde{a}_1 (\, b_0 \Delta u(t+1) + (b_1 - \tilde{a}_1 b_0) \Delta u(t)\,) - \\ &\quad - \tilde{a}_2 b_0 \Delta u(t) + b_0 \Delta u(t+2) \\ &\quad + b_1 \Delta u(t+1) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{10.17}$$

Definindo

$$h_0 = b_0 \;\; ; \;\; h_1 = b_1 - \tilde{a}_1 h_0 \;\; ; \tag{10.18}$$

$$h_2 = b_2 - \tilde{a}_1 h_1 - \tilde{a}_2 h_0 = -\tilde{a}_1 h_1 - \tilde{a}_2 h_0 \;\; ; \;\; \cdots \tag{10.19}$$

tem-se

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_f(t+1\,|t) &= h_0\Delta u(t) \\
\hat{y}_f(t+2\,|t) &= h_0\Delta u(t+1) + h_1\Delta u(t) \\
\hat{y}_f(t+3\,|t) &= h_0\Delta u(t+2) + h_1\Delta u(t+1) + h_2\Delta u(t) \\
&\vdots \\
\hat{y}_f(t+N_u\,|t) &= h_0\Delta u(t+N_u-1)+ \\
&\quad +h_1\Delta u(t+N_u-2)+\cdots+ \\
&\quad +h_{N_u-1}\Delta u(t) \\
\hat{y}_f(t+N_u+1\,|t) &= h_0\Delta u(t+N_u) + h_1\Delta u(t+N_u-1)+ \\
&\quad +\cdots+h_{N_u}\Delta u(t) \\
&\vdots \\
\hat{y}_f(t+N_y\,|t) &= h_0\Delta u(t+N_y-1)+ \\
&\quad +h_1\Delta u(t+N_y-2)+\cdots+ \\
&\quad +h_{N_y-N_u}\Delta u(t+N_u-1)+\cdots+ \\
&\quad +h_{N_y-1}\Delta u(t)
\end{aligned}
\tag{10.20}
$$

e no caso geral:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_f(t+j\,|t) &= \sum_{i=0}^{j-1} h_i\Delta u(t+j-i-1) \\
h_j &= b_j - \sum_{i=1}^{\min(j,\,N_{\tilde{a}})} \tilde{a}_i h_{j-i} \quad ; \quad h_0 = b_0
\end{aligned}
\tag{10.21}
$$

É interessante notar que $\{h_0, h_1, h_2, \ldots\}$ é a seqüência de resposta ao impulso do sistema incremental, que possui função de transferência pulsada no operador deslocamento q^{-1} dada por $\dfrac{B(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}$.

Considerando a restrição imposta ao sinal de controle no problema de otimização estabelecido em (10.5), rescreve-se o conjunto de previsões forçadas em (10.20) como:

$$
\mathbf{\hat{y}_f} = H\mathbf{\Delta u} \tag{10.22}
$$

onde

$$
\mathbf{\hat{y}_f} = [\hat{y}_f(t+1\,|t)\cdots\hat{y}_f(t+N_y\,|t)]^T \tag{10.23}
$$

$$\mathbf{\Delta u} = [\Delta u(t) \cdots \Delta u(t+N_u-1)]^T \tag{10.24}$$

$$H = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & h_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ h_{N_u-1} & h_{N_u-2} & \cdots & h_0 \\ h_{N_u} & h_{N_u-1} & \cdots & h_1 \\ & & \vdots & \\ h_{N_y-1} & h_{N_y-2} & \cdots & h_{N_y-N_u} \end{bmatrix} \tag{10.25}$$

e definindo

$$\mathbf{\hat{y}_l} = [\hat{y}_l(t+1\,|t) \cdots \hat{y}_l(t+N_y\,|t)]^T \tag{10.26}$$

$$\mathbf{\hat{y}} = [\hat{y}(t+1\,|t) \cdots \hat{y}(t+N_y\,|t)]^T \tag{10.27}$$

tem-se de (10.7) que

$$\mathbf{\hat{y}} = H\mathbf{\Delta u} + \mathbf{\hat{y}_l} \tag{10.28}$$

Pode-se ainda tomar apenas o subconjunto de previsões de interesse que estão envolvidas no critério (10.4), como segue:

$$\mathbf{\hat{y}}' = H'\mathbf{\Delta u} + \mathbf{\hat{y}_l}' \tag{10.29}$$

onde

$$\mathbf{\hat{y}_l}' = [\hat{y}_l(t+N_1\,|t) \cdots \hat{y}_l(t+N_y\,|t)]^T \tag{10.30}$$

$$\mathbf{\hat{y}}' = [\hat{y}(t+N_1\,|t) \cdots \hat{y}(t+N_y\,|t)]^T \tag{10.31}$$

e H' é a submatriz constituída das últimas $N_y - N_1 + 1$ linhas de H.

10.2.2 Otimização do Critério de Desempenho

O critério (10.4) pode ser rescrito como:

$$\begin{aligned} J = & \ (\ \hat{y}(t+N_1\,|t) - w(t+N_1)\ )^2 + \cdots + \\ & +(\ \hat{y}(t+N_y\,|t) - w(t+N_y)\ )^2 + \\ & +\lambda(\ (\ \Delta u(t)\ )^2 + \cdots + (\ \Delta u(t+N_u-1)\ )^2\ ) \end{aligned} \tag{10.32}$$

e definindo $\mathbf{w}' = [w(t+N_1) \cdots w(t+N_y)]^T$ tem-se

$$J = (\,\hat{\mathbf{y}}' - \mathbf{w}'\,)^T(\,\hat{\mathbf{y}}' - \mathbf{w}'\,) + \lambda \mathbf{\Delta u}^T \mathbf{\Delta u} \tag{10.33}$$

Portanto

$$J = (\,H'\mathbf{\Delta u} + \hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{1}}' - \mathbf{w}'\,)^T(\,H'\mathbf{\Delta u} + \hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{1}}' - \mathbf{w}'\,) + \lambda \mathbf{\Delta u}^T \mathbf{\Delta u} \tag{10.34}$$

e utilizando a condição necessária para otimalidade tem-se

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{\Delta u}} = 2{H'}^T H' \mathbf{\Delta u} + 2{H'}^T(\,\hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{1}}' - \mathbf{w}'\,) + 2\lambda \mathbf{\Delta u} = 0 \tag{10.35}$$

que implica na lei de controle ótima para o GPC dada por:

$$\mathbf{\Delta u} \;=\; (\,{H'}^T H' + \lambda I\,)^{-1} {H'}^T(\,\mathbf{w}' - \hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{1}}'\,) \tag{10.36}$$

onde $\mathbf{\Delta u}$ é definido em (10.24). Como comentado anteriormente, utiliza-se a estratégia *Receding Horizon*, de tal forma que em cada instante t calcula-se a lei de controle em (10.36) e aplica-se somente o primeiro elemento, ou seja,

$$u(t) = u(t-1) + \Delta u(t) \tag{10.37}$$

É importante observar que a obtenção da lei de controle posicional a partir da lei incremental através da equação acima insere automaticamente um integrador na malha, permitindo o cancelamento de erros em regime permanente para sinais de referência do tipo degrau.

10.2.3 Restrições de Entrada e Saída

A lei de controle em (10.36) foi obtida sem considerar restrições operacionais na entrada manipulada e na saída do sistema. Limitantes inferiores e superiores, no entanto, podem facilmente ser impostos tanto ao sinal de controle quanto à saída prevista do sistema. Nesse caso, a lei de controle $\mathbf{\Delta u}$ deve ser obtida em cada instante de amostragem através da minimização do critério quadrático em (10.34) sujeita ao conjunto de restrições impostas. Como as referidas restrições são dadas por desigualdades lineares em $\mathbf{\Delta u}$, a solução ótima global estrita para o problema pode ser obtida através de Programação Quadrática . Previsões de dinâmicas relacionadas a perturbações mensuráveis agindo sobre o sistema e que sejam representadas pelo modelo podem também ser facilmente inseridas no cálculo da lei de controle .

10.2.4 Propriedades do Controle Preditivo

Algumas propriedades da estratégia de controle preditivo são apresentadas abaixo:

- Com o conhecimento da referência em instantes futuros, o controlador pode reagir de forma antecipativa.

- Restrições operacionais podem ser consideradas explicitamente na obtenção da lei de controle ótima.

- O controlador trata de forma simples a presença de atraso de transporte no sistema a ser controlado. Esse tratamento pode ser realizado de forma direta, através da sua consideração explícita no modelo, ou indireta, através da definição adequada dos horizontes de previsão N_1 e N_y. Nesse último caso, garantindo N_y maior do que o atraso de transporte e suas eventuais variações, não é necessário o conhecimento exato desse atraso. Pode-se também adotar um horizonte inicial $N_1 > 1$, reduzindo assim o esforço computacional na medida que desconsideram-se as previsões que não dependem, devido ao tempo morto, dos sinais de controle a serem determinados.