UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

# COMPENSADOR DINÂMICO ÓTIMO PARA SISTEMAS ESTOCÁSTICOS LINEARES UTILIZANDO FILTRO DE KALMAN E O PRINCÍPIO DA SEPARAÇÃO COM PROJETO MATLAB

IA-601 CONTROLE ESTOCÁSTICO E ADAPTATIVO

WAGNER CARADORI DO AMARAL

JOÃO BOSCO R. DO VAL

20 de outubro de 2003

arquivo filtro_Compens_Kalman.tex

## SISTEMA LINEAR ESTOCÁSTICO

Problema: Considere o sistema linear com ruído aditivo nas variáveis de estado (ruído do sistema) e na equação de observação (ruído na medida)

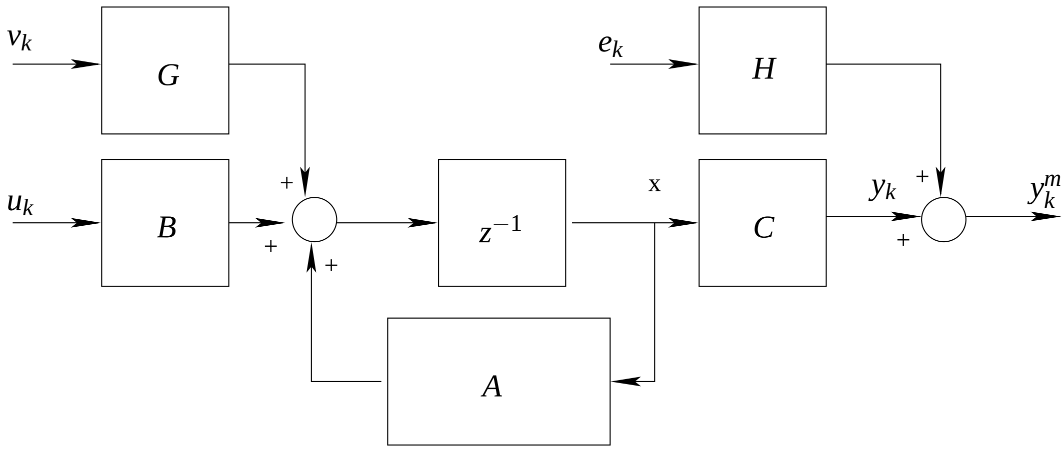



Figura 1: Sistema Linear Discreto com Ruído.

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gv_k \\ y_k = Cx_k + He_k \end{cases}$$

onde:

– $A, B, G, C, H$ são matrizes de dimensão $n \times n, n \times m, n \times \ell, r \times n, r \times \ell$ respectivamente,

– $\{v_k\}$ é uma seqüência de vetores de v.a.'s gaussianas de média nula, não correlacionados e $\mathrm{cov}(e_k) = E[e_k e_k'] = R_v = R_v' > 0$;

– $\{e_k\}$ é uma seqüência de vetores de v.a.'s gaussianas de média nula, não correlacionados e $\mathrm{cov}(\nu_k) = E[\nu_k \nu_k'] = R_e = R_e' > 0$;

– $x_0 \sim \mathrm{N}(\bar{x_0}, \Sigma_0)$;

* O estado inicial $x_0$, $\{v_k\}$ e $\{e_k\}$ são não correlacionados ($\rightarrow$ independentes) entre si;
* as sequências são identicamente distribuídas: $v_k \sim N(0, R_v)$, $e_k \sim \mathrm{N}(0, R_e)$;
* $y_k$ forma a sequência de observações do sistema, i.e., não há observação do vetor de estados $\{x_k\}$, a não ser indiretamente através de $\{y_k\}$.

## PROBLEMA DE CONTROLE

- Deseja-se minimizar o custo de operação na forma:
$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} E[\sum_{k=0}^{t-1} x_k' Q x_k + u_k' R u_k] \tag{1}$$
- O controle só pode ter acesso à saída medida $y_k^m$ para definir a seqüência de ações $u_k$;
- Essa restrição implica em utilizar uma lei de controle por realimentação na forma
$$u_k = g(y_0^m, y_1^m, \ldots, y_k)$$

SOLUÇÃO: É muito mais simples devido ao "princípio da separação"

PRINCÍPIO DA SEPARAÇÃO: No problema de controle Linear Quadrático Gaussiano (LQG) com observação de saída, o problema de controle ótimo e o de estimação de estados podem ser resolvidos separadamente e combinados para fornecer a solução ótima.

1. O problema de controle tem como solução o mesmo que minimiza o custo de controle LQ
$$\lim_{t\to\infty} \sum_{k=0}^{t-1} x_k' Q x_k + u_k' R u_k \tag{2}$$

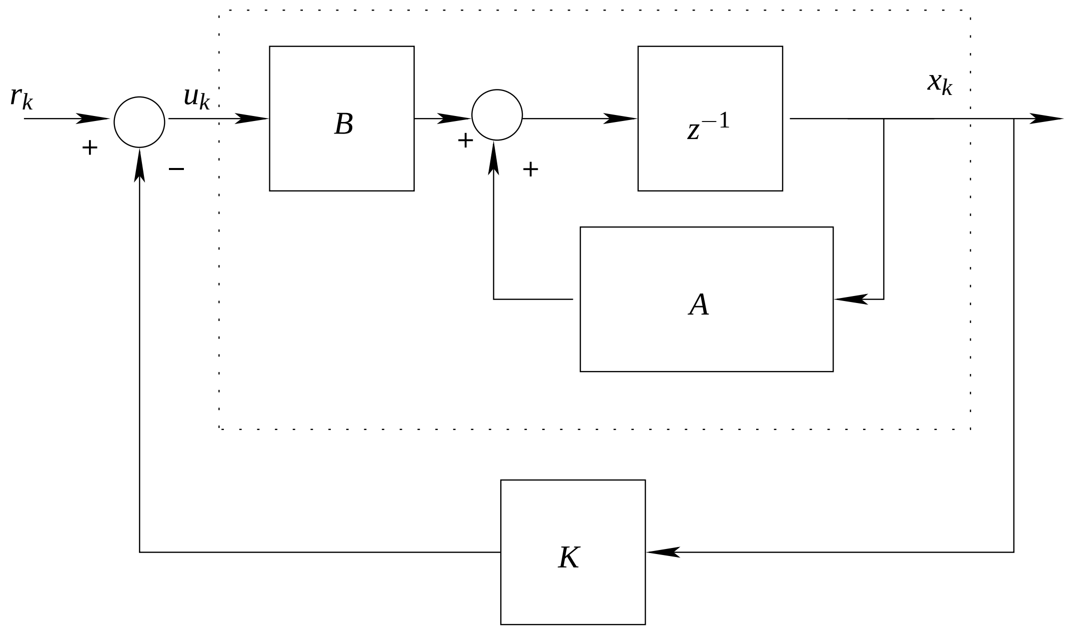



Figura 2: Sistema sem ruído com realimentação de estados.

para o sistema determístico linear sem ruído da fig. 2.

A solução ótima para esse problema é dado pelo ganho:

$$K = (R + B'PB)^{-1}B'SA$$

onde P é a solução semipositiva definida da equação de Riccati:

$$P = Q + A'PA - A'SB(R + B'PB)^{-1}B'SA$$

2. A estimação de estados é realizada pelo filtro de Kalman estacionário, cujo ganho de inovação é definido por:

$$L = ASC'(CSC' + HR_eH')^{-1}$$

onde S é a solução semipositiva definida da equação de Riccati:

$$S = GR_vG' + ASA' - ASC'(CSC' + HR_eH')^{-1}CSA'$$

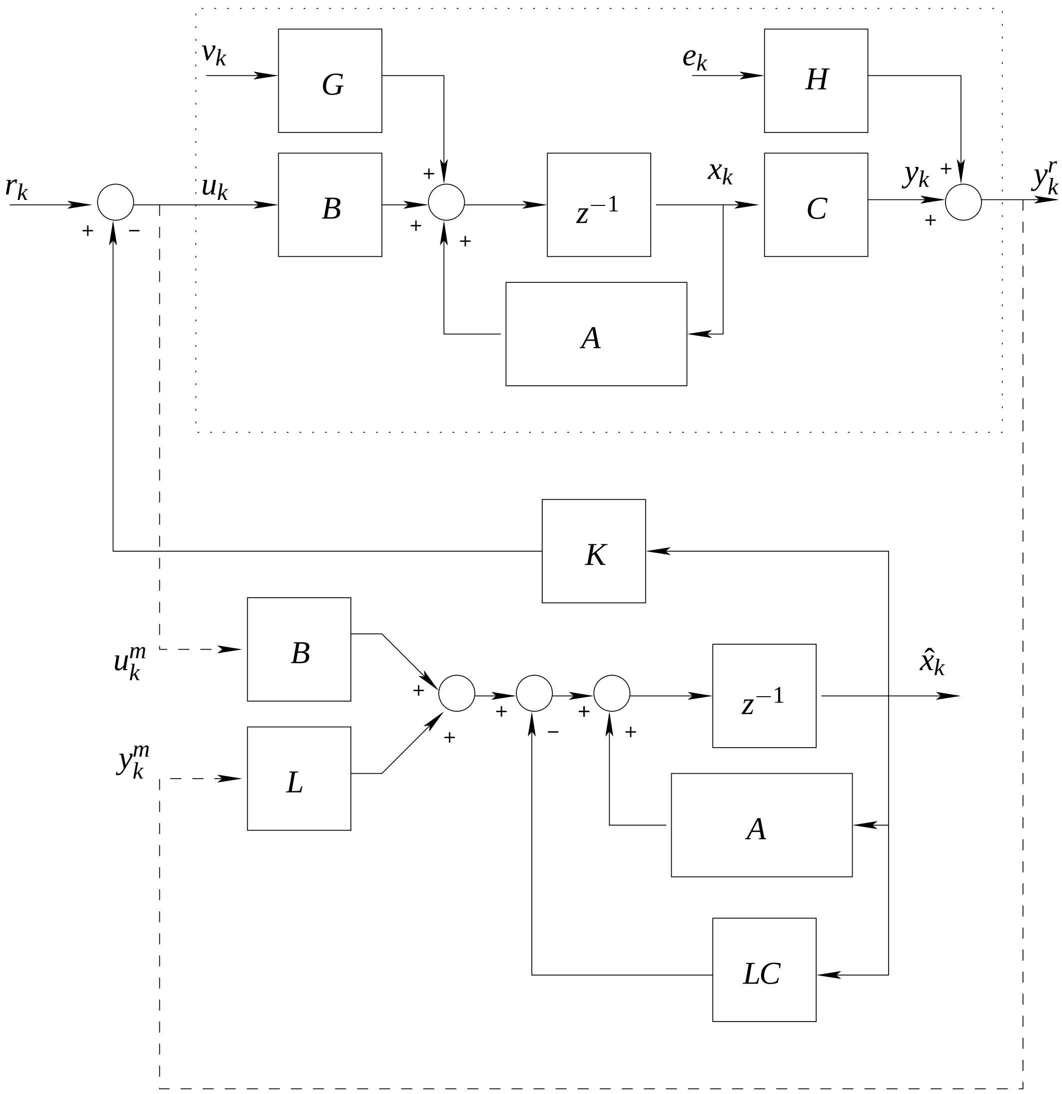



Figura 3: Solução do Problema.

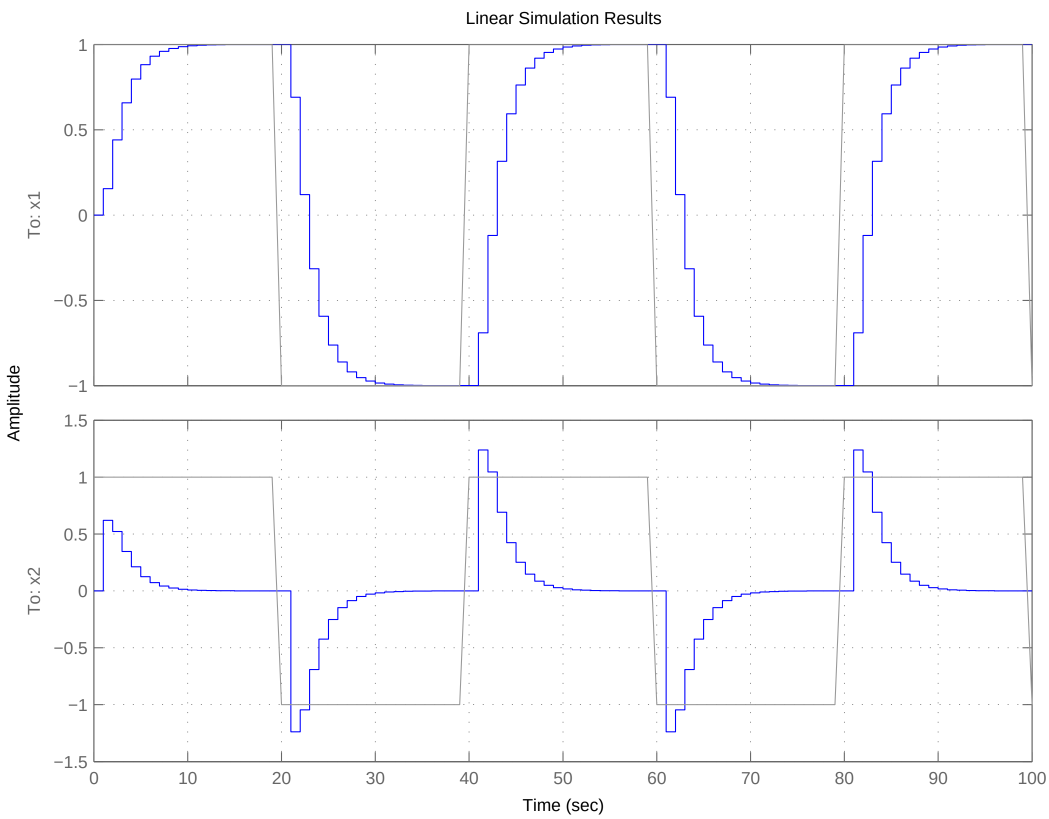
## Exemplo de Solução Utilizando Matlab:

```
% sistema livro do Soderstöm
h=0.5;
A=[1 h ; 0 1];
B=[h^2/2 ; h];
I=[1 0; 0 1];
C=[1 0];
G=eye(2);
H=1;

%ruidos
Cov=[h^2/3 h^2/2 ; h^2/2 h];
Rv=1e-03*Cov; % matriz de covariancia do ruido v_t do sistema
re=1e-03; % variancia do ruido e_t de saida
```

```
%custos LQ
Q=[1 0 ;0 1]; % matriz de pesos do estado para o custo LQ
R=0.1; % peso do controle para o custo LQ

%sistema em malha aberta c/ ruido de entrada
sys_out=ss(A,[B G],C,0,-1,'inputname',{'u' 'v1' 'v2'},'outputname',{'y'});
sys_state=ss(A,[B G],eye(2),0,-1,'inputname',{'u' 'v1' 'v2'},'outputname',{'x1' 'x2'});
```

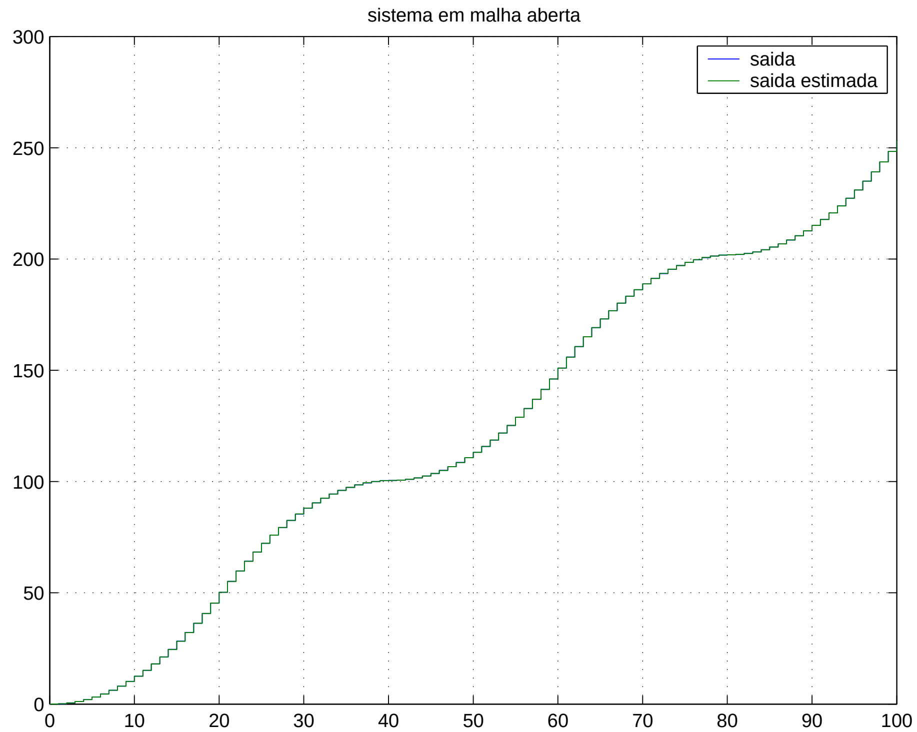
## Controle por realimentação de estados:

```
%Ganho do Controlador Otimo por realimentacao de estados
K = dlqr(A,B,Q,R);
sys_mf1 = feedback(sys_state, K , 1, [1 2],-1); % constroi objeto
M=[C*(I-A+B*K)^-1*B]^-1; % valor inverso do ganho estatico
sys_mf1=series(M,sys_mf1,1,1); % ajuste para ganho unitario em regime

% simulacao do sistema
t=0:100; % vetor com instantes de simulacao
u = square((2*pi/40)*t,50)'; % sinal de controle com periodo de 40 pontos
figure(1), lsim(sys_mf1,u,t);
```



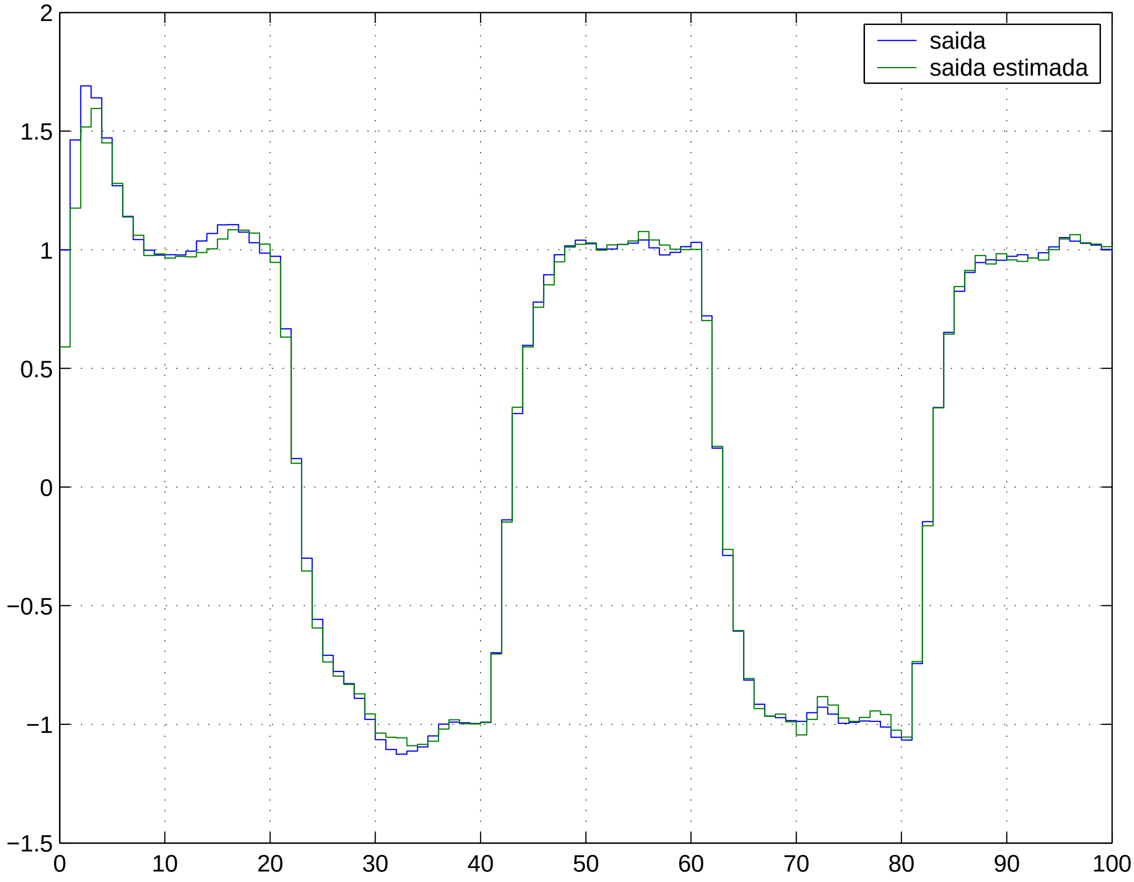
## Filtro de Kalman e sistema em malha aberta

```
%Kalman Filter
[kest,L]=kalman(sys_out,Rv,re);
kest.InputName={'u' 'ym'};

%Sistema em Malha Aberta e Filtro:
%conexao paralela: a 1a.entrada de cada um dos sistemas eh comum
sys_paralelo=parallel(sys_out,kest, 1,1,[],[]);
% conexao para o filtro: saida medida do sistema e' uma das entradas do filtro
sysfil_ma=feedback(sys_paralelo,1,4,1,+1);

%simulacao do sistema em m.a. e filtro
n=length(t);
randn('seed',0)
v=randn(n,2)*sqrt(R1);
e=randn(n,1)*sqrt(re);

[out,t]=lsim(sysfil_ma, [v u H*e]);
y=out(:,1); ye=out(:,2);
figure(2), stairs(t,[y ye])
legend('saida', 'saida estimada'),grid, title('sistema em malha aberta')
```

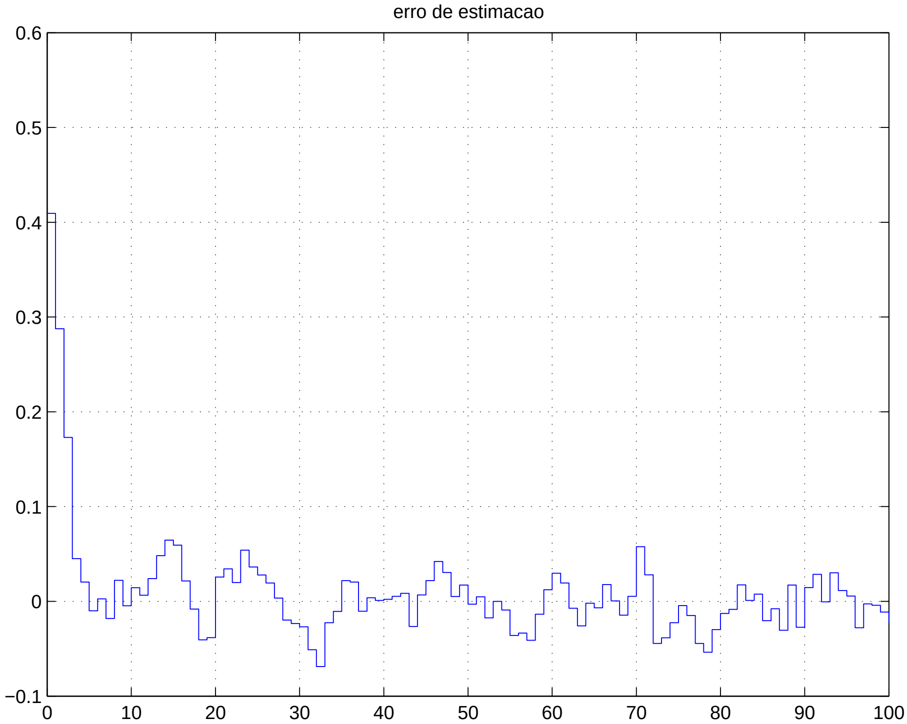


## Solução Final

```
% sistema em malha fechada e filtro com entrada de referencia u
sysfil_mf=feedback(sys_paralelo,[1 0 0; 0 -K],[4 3],[1 3 4],+1);

% ajuste para ganho unitario em regime permanente
sysfil_mf.b=sysfil_mf.b*diag([1 1 M 1]);

%simulacao do sistema em m.f. e filtro
%estabelece condicoes inciais diferentes x(0)=[1 1]' e xe(0) = [0 0]'
[out,t,x]=lsim(sysfil_mf, [v u H*e], t, [1 1 0 0]');
y=out(:,1); ye=out(:,2);
esforco_controle= -out(:,2:3)*K'+M*u;

figure(3), stairs(t,[y ye]), grid, legend('saida', 'saida estimada')
```



```
figure(4), stairs(t,y-ye), grid, title('erro de estimacao')
```




```
figure(5), stairs(t,esforco_controle), grid, title('esforco de controle')
```