# Capítulo 7

# Controlador DMC-Dynamic Matrix Control

## 7.1 Introdução

Em 1979, Cluter e Ramaker apresentaram um algoritmo preditivo,o controlador DMC, como uma metodologia capaz de manipular restrições operacionais nas variáveis de controle e saída de forma sistemática. Este algoritmo é adequado para o controle de processos com elevado grau de interação entre as variáveis, ordens elevadas e atrasos dominantes. Estas características, aliadas à capacidade de manipular restrições, tem garantido a utilização bem sucedida deste algoritmo na indústria química e petroquímica . O DMC apresenta beneficíos no controle de sistemas com as seguintes características:

- Inerentemente multivariáveis com forte interação entre as variáveis controladas;
- Apresentem potencial para otimização em tempo real, como no caso de unidades com elevado consumo de energia e/ou que produzem insumos de valor comercial bastante diferentes;
- Possuem limites nos equipamentos e nas condições operacionais, pois este controlador apresenta a característica de manipular restrições operacionais explicitamente.

O algoritmo DMC utiliza um modelo obtido a partir da resposta ao degrau do processo. Uma vez conhecido o modelo, o problema a ser resolvido se resume com no caso do algoritmo preditivo GPC, na previsão da saída do processo e na otimização de um critério, sujeito a um conjunto de restrições, que considera os erros entre as previsões da saída e os sinais de referência

mais os incrementos nas ações de controle. Dos sinais de controle calculados, somente o primeiro, é aplicado ao sistema. No instante de tempo seguinte todo o procedimento é repetido, em uma estratégia conhecida como "Receding Horizon", de forma similar ao controlador GPC.

### 7.1.1 DMC SEM RESTRIÇÕES

O objetivo do algoritmo DMC é calcular as ações de controle, representadas por incrementos nas variáveis manipuladas, através da minimização do critério descrito na equação (7.1)

$$J = \sum_{j=1}^{N_y} \lambda_y(\, \hat{y}(t+j\,|t) - w(t+j)\,)^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda_u(\, \Delta u(t+j-1)\,)^2 \tag{7.1}$$

onde $N_y$ é o horizonte de previsão da saída, $N_u$ é o horizonte de controle, $(N_u \leq N_y)$, $\lambda_y$ e $\lambda_u$ são as ponderações nos sinais de saída e de controle, $\hat{y}(t+j\,|t)$ é a previsão da saída no instante $t+j$ utilizando as informações disponíveis até o instante $t$, $w(t)$ é a referência no instante $t$ e $\Delta u(t)$ é o incremento do sinal de controle no instante $t$.

Para que esse problema de otimização possa ser resolvido, é necessário que se tenha um modelo processo para calcular as previsões da saída. O modelo usado no algoritmo DMC é conhecido como modelo de resposta ao degrau.

### 7.1.2 Modelo do Processo

O modelo de resposta ao degrau utilizado pelo algoritmo DMC é dado pela equação (7.2)

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) + p(t) \tag{7.2}$$

onde , $\Delta u(t)$ e $y(t)$ são respectivamente o incremento da entrada e a saída do sistema no instante discreto de tempo $t$, $g_i$ é a resposta ao degrau no í-ésimo instante de tempo a partir da aplicação do degrau e $p(t)$ é a perturbação atuando no processo.

Os valores previstos da saída para instantes futuros de tempo são dados por:

$$\hat{y}(t+l|t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t+l-i) + \hat{p}(t+l|t) \tag{7.3}$$

pode-se reescrever a equação de previsão, separando-se os termos referentes às contribuições do passado e futuro, conforme descrito a seguir: (Camacho, 1999).

$$\hat{y}(t+l|t) = \sum_{i=l+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+l-i) + \sum_{i=1}^{l} g_i \Delta u(t+l-i) + \hat{p}(t+l|t) \qquad (7.4)$$

A primeira parcela desta equação representa a contribuição para a variável de saída, até o instante $t-1$, dos incrementos passados na variável manipulada(controle). A segunda parcela representa as contribuições futuras da variável manipulada. As perturbações $\hat{p}(t+l|t)$são consideradas constantes para os instantes de tempo superiores a $t$ e dadas por:

$$\hat{p}(t+l|t) = \hat{p}(t|t) = y(t) - \hat{y}(t|t)$$

$$\hat{y}(t|t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i)$$

e

$$\hat{y}(t+l|t) = \sum_{i=l+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+l-i) + \sum_{i=1}^{l} g_i \Delta u(t+l-i) + y(t) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) \quad (7.5)$$

ou

$$\hat{y}(t+l|t) = \sum_{i=1}^{l} g_i \Delta u(t+l-i) + f(t+l) \qquad (7.6)$$

$$f(t+l) = y(t) - \sum_{i=1}^{\infty} (g_{i+l} - g_i) \Delta u(t-i)$$

$f(t+l)$ representa a resposta livre do sistema, ou seja, a parte da resposta que não depende das futuras ações de controle. Caso o processo seja assintoticamente estável, os coeficientes $g_i$ da resposta ao degrau tendem a ser constante após um valor N (Camacho, 1999). Neste caso, pode-se considerar que $g_{t+i} - g_i \simeq 0$ para $i > N$.

$$f(t+l) = y(t) + \sum_{i=1}^{N} (g_{i+l} - g_i) \Delta u(t-i)$$

Assumindo que $l = 1, \ldots, N_y$ e que $\Delta u(t+i) = 0, i > N_u$ então pode-se escrever que:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}(t+1\,|t) &= g_1\Delta u(t) + f(t+1) && (7.7)\\
\hat{y}(t+2\,|t) &= g_2\Delta u(t) + g_1\Delta u(t+1) + f(t+2) && (7.8)\\
\vdots \quad & \quad \vdots && (7.9)\\
\hat{y}(t+N_y\,|t) &= \sum_{i=1}^{N_u} \Delta u(t+N_y-i) + f(t+N_y) && (7.10)
\end{aligned}
$$

ou na forma vetorial

$$\hat{\boldsymbol{y}} = G\boldsymbol{\Delta u} + \boldsymbol{f} \tag{7.11}$$

onde $G$ é a matriz dinâmica do processo, dada por:

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & \dots & 0 \\ g_{N_u} & g_{N_u-1} & \cdots & g_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N_y} & g_{N_y-1} & \cdots & g_{N_y-N_u+1} \end{pmatrix}$$

e

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{y}}' &= \begin{pmatrix} \hat{y}(t+1\,|t) & \hat{y}(t+2\,|t) & \dots & \hat{y}(t+N_y\,|t) \end{pmatrix}\\
\boldsymbol{f}' &= \begin{pmatrix} f(t+1) & f(t+2) & \dots & f(t+N_y) \end{pmatrix}\\
\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} &= [\Delta u(t) \cdots \Delta u(t+N_u-1)]^T && (7.12)
\end{aligned}
$$

### 7.1.3 Algoritmo de Controle

O critério (7.1) pode ser rescrito como:

$$
\begin{aligned}
J \;=\; & \lambda_y((\,\hat{y}(t+N_1\,|t) - w(t+N_1)\,)^2 + \cdots + \\
& +(\,\hat{y}(t+N_y\,|t) - w(t+N_y)\,)^2) + \\
& +\lambda_u(\,(\,\Delta u(t)\,)^2 + \cdots + (\,\Delta u(t+N_u-1)\,)^2\,)
\end{aligned} \tag{7.13}
$$

e definindo $\mathbf{w}' = [w(t+N_1)\cdots w(t+N_y)]^T$ tem-se

$$J = \lambda_y(\,\hat{\mathbf{y}}' - \mathbf{w}'\,)^T(\,\hat{\mathbf{y}}' - \mathbf{w}'\,) + \lambda_u \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}^T\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} \tag{7.14}$$

Portanto

$$J = \lambda_y(\,G\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} + \mathbf{f}' - \mathbf{w}'\,)^T(\,G\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} + \mathbf{f}' - \mathbf{w}'\,) + \lambda_u \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}^T\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} \tag{7.15}$$

e utilizando a condição necessária para otimalidade tem-se

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{\Delta u}} = 2\lambda_y G^T G \mathbf{\Delta u} + 2\lambda_y G^T (\, \mathbf{f}' - \mathbf{w}' \,) + 2\lambda_u \mathbf{\Delta u} = 0 \tag{7.16}$$

que implica na lei de controle ótima para o GPC dada por:

$$\mathbf{\Delta u} \;=\; (\, \lambda_y G^T G' + \lambda_u I \,)^{-1} G^T \lambda_y (\, \mathbf{w}' - \mathbf{f}' \,) \tag{7.17}$$

onde $\mathbf{\Delta u}$ é definido em (7.12). Como comentado anteriormente, utiliza-se a estratégia *Receding Horizon*, de tal forma que em cada instante $t$ calcula-se a lei de controle em (7.17) e aplica-se somente o primeiro elemento, ou seja,

$$u(t) = u(t-1) + \Delta u(t) \tag{7.18}$$

É importante observar que a obtenção da lei de controle posicional a partir da lei incremental através da equação acima insere automaticamente um integrador na malha, permitindo o cancelamento de erros em regime permanente para sinais de referência do tipo degrau.

### 7.1.4 Restrições de Entrada e Saída

A lei de controle em (7.17) foi obtida sem considerar restrições operacionais na entrada manipulada e na saída do sistema. Limitantes inferiores e superiores, no entanto, podem facilmente ser impostos tanto ao sinal de controle quanto à saída prevista do sistema. Nesse caso, a lei de controle $\mathbf{\Delta u}$ deve ser obtida em cada instante de amostragem através da minimização do critério quadrático em (7.15) sujeita ao conjunto de restrições impostas. Como as referidas restrições são dadas por desigualdades lineares em $\mathbf{\Delta u}$, a solução ótima global estrita para o problema pode ser obtida através de Programação Quadrática . Previsões de dinâmicas relacionadas a perturbações mensuráveis agindo sobre o sistema e que sejam representadas pelo modelo podem também ser facilmente inseridas no cálculo da lei de controle .

### 7.1.5 Considerações sobre a sintonia do Controlador DMC

Os parâmetros que determinam a sintonia de um controlador DMC são os seguintes : 1. Ponderações $\lambda_y$ e $\lambda_u$. A importância relativa de cada um dos critérios especificados na função objetivo pode ser reforçada por um aumento nos valores destes parâmetros ECE. Aumentos nas ponderações $\lambda_y$ diminuem o erro entre a saída e sua referencia. Aumento nas ponderações $\lambda_u$ diminuem

os incrementos nas variáveis manipuladas, tornando a resposta das variáveis de saída mais lenta e suave. As ponderações $\lambda_u$ também afetam diretamente a robustez do controlador DMC, $\lambda_u$'s maiores aumentam a robustez. 2. Horizontes de Previsão e Controle: Um valor elevado para o horizonte de controle, e conseqüentemente para o horizonte de previsão pois $N_y \geq N_u$, geralmente melhora o desempenho do controlador DMC, porém aumenta o valor dos incrementos nas variáveis manipuladas reduzindo a robustez do mesmo. A determinação adequada dos horizontes de previsão e controle é fundamental para o bom desempenho do algoritmo. Observa-se que sintonizar um controlador DMC fixando os horizonte e manipulando as ponderações geralmente não conduz a bons resultados. Já o procedimento inverso torna o processo de sintonia mais factível (Morales, 1995). Isto demonstra que os horizontes de previsão e controle possuem importância relativa maior que as ponderações $\lambda_y$ e $\lambda_u$.