Capítulo 4

Controle Estocástico

4.1 Introdução

Seja o problema:

$$x_{k+1} = f(x_x, u_k, k)$$

$$y_k = g(x_k, k)$$

Deseja-se calcular a sequência de controle

$$U_{n-1}^* = \{ \; u_0^* \quad u_1^* \quad \cdots \quad u_{n-1}^* \; \}$$

tal que:

$$\min_{U_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} R_k(x_{k+1}, u_k)$$

Para a solução deste problema utiliza-se programação dinâmica. Assim, supondo que $k = n - 1$,deve-se determinar u_{n-1} que minimiza $R_{n-1}(x_n, u_{n-1})$, isto é:

$$R_{n-1}(x_n, u_{n-1}) = R_{n-1}(f(x_{n-1}, u_{n-1}, n-1), u_{n-1})$$

Definindo

$$S_{n-1} = R_{n-1}(f(x_{n-1}, u_{n-1}^*, n-1), u_{n-1}^*) = \min_{u_{n-1}} R_{n-1}(x_n, u_{n-1})$$

tem-se que $S_{n-1}(x_{n-1})$ é o mínimo obtido para a função de custo no último instante.
Para o instante anterior tem-se que:

$$\min_{u_{n-2} u_{n-1}} \{R_{n-2}(x_{n-1}, u_{n-2}) + R_{n-1}(x_n, u_{n-1})\}$$

A primeira parcela da última equação não é função do controle no instante $n-1$; a segunda parcela é função de u_{n-1} e u_{n-2}. Assim:

$$S_{n-2}(x_{n-2}) = \min_{u_{n-2}}\{R_{n-2}(x_{n-1}, u_{n-2}) + \min_{u_{n-1}} R_{n-1}(x_n, u_{n-1})\}$$

$$= \min_{u_{n-2}}\{R_{n-2}(x_{n-1}, u_{n-2}) + S_{n-1}(x_{n-1})\}$$

$$= \min_{u_{n-2}}\{R_{n-2}(f(x_{n-2}, u_{n-2}, n-2)) + S_{n-1}(f(x_{n-2}, u_{n-2}, n-2))\}$$

$$S_{n-2}(x_{n-2}) = \min_{u_{n-2}}\{R_{n-2}(f(x_{n-2}, u_{n-2}, n-2)) +$$

$$+ S_{n-1}(f(x_{n-2}, u_{n-2}, n-2))\}$$

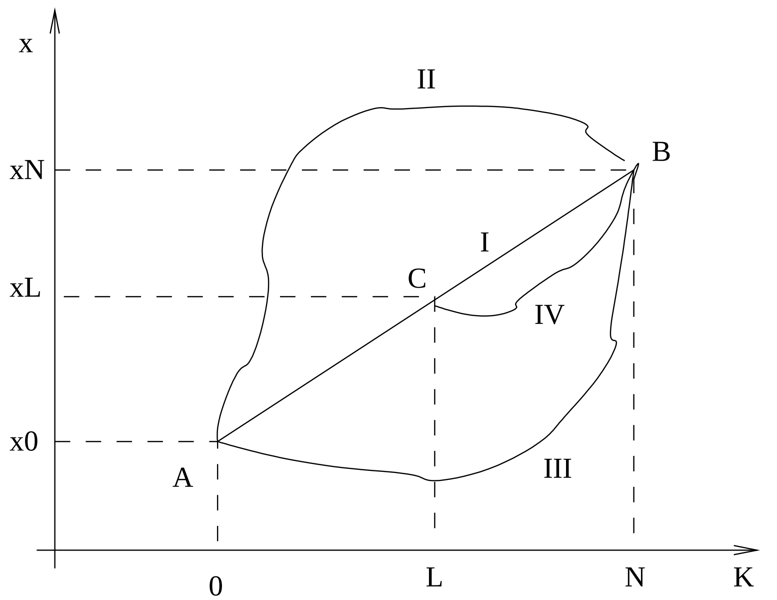
Denominada Equação Recorrente de Bellman

4.1.1 Princípio da Otimalidade de Bellman

A sequência de valores que constituem o controle ótimo tem a propriedade de que qualquer que seja o estado inicial e o valor inicial de controle, o restante da sequência de controle deve ser ótima para o problema de otimização em que o estado inicial é o estado resultante do primeiro controle.
Exemplo:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, k)$$

$$\min_u \{\sum_{k=0}^{N} R(x_k, u_k, k)\}$$



Seja I a trajetória ótima, isto é, a trajetória originada pelo controle ótimo, logo o custo associado a I é menor do que o custo associado a qualquer outra trajetória, isto é:

$$J_I < J_{II} \text{ e } J_I < J_{III}$$

Seja o problema:

$$\min_u \{\sum_{k=L}^{N} R(x_k, u_k, k)\} \text{ e } x(L) = x_L \; x(N) = x_N$$

A trajetória ótima é CB_I
Prova: Por Absurdo.
Supor que a trajetória ótima entre os pontos C e B seja CB_{IV}, então a trajetória ótima entre os pontos A e B será $AC_I + CB_{IV}$ o que é Falso.$\Rightarrow$ CB_I é ótima.

Exemplo: Seja o sistema

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k$$

a) Minimizar o critério $J = x_N^2$

$$J = x_N^2 = (ax_{N-1} + bu_{N-1})^2$$

$$u_{N-1}^{ot} = -(a/b)x_{N-1}$$

b) Parâmetro a estocástico

$$x_{k+1} = a_k x_k + bu_k$$

$\{a_k\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes gausssiana com média θ e variância σ^2.
Minimizar o critério:

$$J = \mathcal{E}\{x_N^2\}$$

$$J = \mathcal{E}_{x_0 x_1 \ldots x_{N-1}}\{\mathcal{E}_{x_N}(x_N^2/x_o x_1 \ldots x_{N-1} u_0 u_1 \ldots u_{N-1})\}$$

$$J = \mathcal{E}_{x_0 x_1 \ldots x_{N-1}}\{\mathcal{E}_{x_N}(x_N^2/x^{N-1}u^{N-1})\}$$

$$\mathcal{E}_{x_N}(x_N^2/x^{N-1}u^{N-1}) = \mathcal{E}_{x_N}\{(a_{N-1}x_{N-1} + bu_{N-1})^2/x^{N-1}u^{N-1}\}$$

$$J = \mathcal{E}_{x_N}\{a_{N-1}^2 x_{N-1}^2 + b^2 u_{N-1}^2 + 2a_{N-1}x_{N-1}bu_{N-1}/x^{N-1}u^{N-1}\}$$

$$J = (\sigma^2 + \theta^2)x_{N-1}^2 + b^2 u_{N-1}^2 + 2\theta x_{N-1} b u_{N-1}$$

$$J = (\theta x_{N-1} + bu_{N-1})^2 + \sigma^2 x_{N-1}^2$$

$$u_{N-1}^{ot} = -\theta x_{N-1}/b$$

Neste caso a Lei de Controle Ótima pode ser obtida a partir da lei determinística, substituindo-se a variável aleatória pelo seu valor médio (Princípio da Equivalência Certa).
c) Suponha agora que se tem informação incompleta sobre o estado, isto é, se mede o estado com imprecisão.

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k$$

$$y_k = x_k + v_k$$

$$\mu_k = \mathcal{E}\{x_k/y^k\} \text{ e } \sigma_{x_k}^2 = var\{x_k/y^k\}$$

$$\text{Minimizar o critério } J = \mathcal{E}\{x_N^2/y^{N-1}u^{N-1}\}$$

$$J = \mathcal{E}\{(ax_{N-1} + bu_{N-1})^2/y^{N-1}u^{N-1}\}$$

$$J = (a\mu_{N-1} + bu_{N-1})^2 + a^2\sigma_{x_{N-1}}^2$$

logo

$$u_{N-1}^{ot} = -(a/b)\mu_{N-1}$$

Esta lei de controle também corresponde a aplicar o princípio da equivalência certa.

d) Parâmetro b estocástico

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k$$

$$y_k = x_k$$

$$\text{Seja } \bar{b} = \mathcal{E}\{b/x^{N-1}\} \text{ e } \sigma^2 = var\{b_{N-1}/x^{N-1}\}$$

$$J = \mathcal{E}\{x_N^2/x^{N-1}, u^{N-1}\}$$

$$J = \mathcal{E}\{(ax_{n-1} + bu_{n-1})^2/x^{N-1}, u^{N-1}\}$$

$$J = \mathcal{E}\{a^2x_{n-1}^2 + b^2u_{n-1}^2 + 2abx_{N-1}u_{N-1}/x^{N-1}, u^{N-1}\}$$

$$= a^2x_{N-1}^2 + (\sigma^2 + \bar{b}^2)u_{N-1}^2 + 2a\bar{b}x_{N-1}u_{N-1}$$

$$2(\sigma^2 + \bar{b}^2)u_{N-1}^{ot} = -2a\bar{b}x_{N-1}$$

$$u_{N-1}^{ot} = -(\bar{b}/(\bar{b}^2 + \sigma^2))ax_{N-1}$$

Neste caso o controle ótimo difere do controle C.E. Obtém-se uma lei de controle denominada cautelosa, pois o controle é inversamente proporcional ao erro na estimação do parâmetro b.

4.2 Controle Ótimo de Sistemas Estocásticos

4.2.1 Proposições Básicas

Sejam x e y duas variáveis aleatórias e seja u a variável de controle. Deseja-se obter u tal que J seja mínimo, onde:

$$J = \mathcal{E}_{xy}\{R(x, y, u)\}$$

4.2.2 Informação Completa de Estado

Seja $u = u(x, y)$ isto é, mede-se o estado x.
Lema: Suponha que $R(x, y, u)$ tenha um único mínimo em relação a u para $\forall\, x, y$ .Seja $u^o(x, y)$ o valor do controle que minimiza $R(x, y, u)$ em relação a u . Então:

$$\min_{u(x,y)} \mathcal{E}_{xy}\{R(x, y, u)\} = \mathcal{E}_{xy}\{\min_{u(x,y)} R(x, y, u)\} =$$

$$= \mathcal{E}_{xy}\{R(x, y, u^o)\}$$

Portanto a minimização e a esperança matemática comutam.
Prova: Para $\forall u\ R(x, y, u) \geq R(x, y, u^o) = \min\limits_{u(x,y)} R(x, y, u)$

$$\mathcal{E}\{R(x, y, u)\} \geq \mathcal{E}\{R(x, y, u^o)\} = \mathcal{E}\{\min_{u(x,y)} R(x, y, u)\}$$

$$\min_{u(x,y)} \mathcal{E}\{R(x, y, u)\} \geq \min_{u(x,y)} \mathcal{E}\{R(x, y, u^o)\} = \mathcal{E}\{\min_{u(x,y)} R(x, y, u)\}$$

Portanto

$$\min_{u(x,y)} R(x, y, u) \geq \mathcal{E}\{\min_{u(x,y)} R(x, y, u)\}$$

Como também $u^o(x, y)$ é uma estratégia adimissível de controle, mas não obrigatóriamente mínimo de $\mathcal{E}R$, tem-se que:

$$\min_{u(x,y)} \mathcal{E}\{R(x, y, u)\} \leq \mathcal{E}R(x, y, u^o)$$

Portanto

$$\min_{u(x,y)} \mathcal{E}R(x, y, u) = \mathcal{E}\{\min_{u(x,y)} R(x, y, u)\}$$

4.2.3 Informação Incompleta de Estado

Neste caso não se tem diretamente a informação do estado, isto é, $u = u(y)$.
Lema: Se a função $f(y,u) = \mathcal{E}\{R(x,y,u)/y\}$ tem um único mínimo em relação a u para $\forall y$ e seja $u^o(y)$ o valor que minimiza $\mathcal{E}_x\{R(x,y,u)/y\}$ então:

$$\min_{u(y)} \mathcal{E}_{xy}\{R(x,y,u)\} = \min_{u(y)} \mathcal{E}_y\{\mathcal{E}_x R(x,y,u)/y\}$$

$$= \mathcal{E}_y\{\min_{u(y)} \mathcal{E}_x R(x,y,u)/y\} =$$
$$= \mathcal{E}_y\{R(x,y,u^o(y))\}$$

Prova: Para $\forall u$ tem-se que:

$$f(y,u) \geq f(y,u^o(y)) = \min_{u(y)} f(y,u)$$

$$\mathcal{E}_x\{R(x,y,u)/y\} \geq \mathcal{E}_x\{R(x,y,u^o)/y\} \geq \mathcal{E}_x\{\min_{u(y)} R(x,y,u)/y\}$$
$$\mathcal{E}_y\mathcal{E}_x\{R(x,y,u)/y\} \geq \mathcal{E}_y\{\min_{u(y)} \mathcal{E}_x R(x,y,u)/y\}$$
$$\mathcal{E}\{R(x,y,u)\} \geq \mathcal{E}_y\{\min_{u(y)} \mathcal{E}_x R(x,y,u)/y\}$$
$$\min_{u(y)} \mathcal{E}\{R(x,y,u)\} \geq \min_{u(y)} \mathcal{E}_y\{\min_{u(y)} \mathcal{E}_x R(x,y,u)/y\}$$
$$\min_{u(y)} \mathcal{E}\{R(x,y,u)\} \geq \mathcal{E}_y\{\min_{u(y)} \mathcal{E}_x R(x,y,u)/y\}$$

Contudo $u^o(y)$ é uma estratégia de controle admissível. Assim

$$\mathcal{E}\{R(x,y,u^o)\} \geq \min_{u(y)} \mathcal{E} R(x,y,u)$$

Nota:

$$\min_{u(y)} \mathcal{E}\{R(x,y,u)/y\} \geq \min_{u(x,y)} \mathcal{E}\{R(x,y,u)\}$$

Isto é, tem-se um desempenho 'pior' quando a quantidade de informação é menor.

4.3 Estratégia de Controle Dual

Seja o sistema

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k)$$

$$y_k = g(x_k, v_k)$$

São dados $p(w_k)$ $p(v_k)$ $p(x_0)$
Problema: Determinar a sequência de controle u_k ,isto é:

$$U^*(0 \to N-1) = \{u_0^* u_1^* \ldots u_{N-1}^*\}$$

que minimiza

$$J_N = \{\sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{E} R_k(x_{k+1}, u_k)\}$$

A lei de controle obtida no instante k , em malha fechada, será função da informação disponível até este instante, isto é:

$$u_k = u_k(I_k)$$

onde I_k é a informação disponível no instante k.

$$I_k = \{Y(0 \to k), U(0 \to k-1\}$$

$$I_{k+1} = F\{I_k, y_{k+1}, u_k)$$

Os controles são determinados utilizando-se o princípio da otimalidade de Bellman. Assim o controle ótimo no instante $k = N-1$ é obtido a partir de:

$$\min_{u_{N-1}} \mathcal{E}\{R_{N-1}(x_N, u_{N-1})\} \text{ com } u_{N-1} = u_{N-1}(I_{N-1})$$

$$\mathcal{E}\{R_{N-1}(x_N, u_{N-1}(I_{N-1}))\} = \int R_{N-1}(.)p(x_N, I_{N-1})dx_n dI_{N-1}$$

$$= \int R_{N-1}(.)p(x_N/I_{N-1})p(I_{N-1})dx_n dI_{N-1} =$$

$$= \mathcal{E}_{I_{N-1}}\{\mathcal{E}_{x_N}(R_{N-1}(x_N, u_{N-1}(I_{N-1}))/I_{N-1})\}$$

$$\min_{u_{N-1}} \mathcal{E}\{R_{N-1}(x_N, I_{N-1})\} = \mathcal{E}_{I_{N-1}}\{\min_{u_{N-1}} \mathcal{E}_{x_N}(R_{N-1}(x_N, I_{N-1})/I_{N-1})\}$$

$$= \mathcal{E}_{I_{N-1}}(S_{N-1}(I_{N-1}))$$

com

$$S_{N-1}(I_{N-1}) = \min_{u_{N-1}} \mathcal{E}_{x_N}(R_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1})/I_{N-1})$$

Para $k = N - 2$ tem-se que:

$$\min_{u_{N-1}u_{N-2}} \mathcal{E}\{R_{N-2}(x_{N-1}, u_{N-2}(I_{N-2})) + R_{N-1}(x_N, u_{N-1}(I_{N-1}))\}$$

A primeira parcela desta equação pode ser escrita como:

$$\mathcal{E}R_{N-2}(x_{N-1}, u_{N-2}(I_{N-2})) = \int R_{N-2}(x_{N-1}, I_{N-2})p(x_{N-1}, I_{N-2})dx_{N-1}dI_{N-2}$$

$$= \int R_{N-2}(x_{N-1}, I_{N-2})p(x_{N-1}/I_{N-2})p(I_{N-2})dx_{N-1}dI_{N-2}$$

$$= \mathcal{E}_{I_{N-2}}\{\mathcal{E}_{x_{N-1}}(R_{N-2}(x_{N-1}, I_{N-2})/I_{N-2})\}$$

Tem-se também que:

$$\mathcal{E}R_{N-1}(x_N, u_{N-1}) = \int R_{N-1}(x_N, I_{N-1})p(x_N, I_{N-1})dx_N dI_{N-1}$$

$$p(x_N, I_{N-1}) = p(x_N, I_{N-2}, u_{N-2}, y_{N-1}) =$$

$$= p(x_N/I_{N-2}, u_{N-2}, y_{N-1})p(I_{N-2}, u_{N-2}, y_{N-1}) =$$

$$= p(x_N/I_{N-1})p(y_{N-1}/I_{N-2}, u_{N-2})p(I_{N-2}, u_{N-2})$$

logo

$$\mathcal{E}R_{N-1}(x_N, u_{N-1}) = \mathcal{E}_{I_{N-2}}\{\mathcal{E}_{y_{N-1}}\{\mathcal{E}_{x_N}(R_{N-1}(.)/I_{N-1})/I_{N-2}, u_{N-2}\}\}$$

Portanto

$$\mathcal{E}\{R_{N-2}(x_{N-1}, I_{N-2}) + R_{N-1}(x_N, u_{N-1}(I_{N-1}))\} =$$

$$= \mathcal{E}_{I_{N-2}}\{\mathcal{E}_{x_{N-1}}(R_{N-2}(x_{N-1}, I_{N-2})/I_{N-2})\} +$$

$$+ \mathcal{E}_{I_{N-2}}\{\mathcal{E}_{y_{N-1}}\{\mathcal{E}_{x_N}(R_{N-1}(.)/I_{N-1})/I_{N-2}, u_{N-2}\}\}$$

$$\min_{u_{N-2}u_{N-1}} \mathcal{E}\{R_{N-2}(x_{N-1}, I_{N-2}) + R_{N-1}(x_N, u_{N-1}(I_{N-1}))\} =$$

$$= \min_{u_{N-2}}\{\mathcal{E}_{I_{N-2}}\{\mathcal{E}_{x_{N-1}}(R_{N-2}(u_{N-2})/I_{N-2})\} +$$

$$+ \min_{u_{N-1}}\{\mathcal{E}_{y_{N-1}}\{\mathcal{E}_{x_N}(R_{N-1}(u_{N-1})/I_{N-1})/I_{N-2}, u_{N-2}\}\}\}$$

Utilizando o lema resulta que:

$$= \mathcal{E}_{I_{N-2}}\{\min_{u_{N-2}}\{\{\mathcal{E}_{x_{N-1}}(R_{N-2}(u_{N-2})/I_{N-2})\} +$$

$$+\mathcal{E}_{y_{N-1}} \min_{u_{N-1}} \{\{\mathcal{E}_{x_N}(R_{N-1}(u_{N-1})/I_{N-1})/I_{N-2}, u_{N-2}\}\}\}$$

$$= \mathcal{E}_{I_{N-2}} \min_{u_{N-2}} \{\mathcal{E}_{x_{N-1}}(R_{N-2}(u_{N-2})/I_{N-2})\}+$$

$$+\mathcal{E}_{y_{N-1}}\{S_{N-1}(I_{N-1})/I_{N-2}u_{N-2}\}\}$$

$$= \mathcal{E}_{I_{N-2}}\{S_{N-2}(I_{N-2})\}$$

$$S_{N-2}(I_{N-2}) = \min_{u_{N-2}} \{\mathcal{E}_{x_{N-1}}(R_{N-2}(u_{N-2})/I_{N-2})\}+$$

$$+\mathcal{E}_{y_{N-1}}\{S_{N-1}(I_{N-1})/I_{N-2}u_{N-2}\}\}$$

E a equação recorrente de Bellman é dada por:

$$S_k(I_k) = \min_{u_k} \{\mathcal{E}_{x_{k+1}}(R_k(u_k)/I_k)\} + \mathcal{E}_{y_{k+1}}\{S_{k+1}(I_{k+1})/I_k u_k\}\}$$

Observações:
A dimensão de $I(k)$ cresce com o instante k, logo tem-se problema de dimensão.
Em cada instante de tempo devem ser calculadas as densidades:

$$p(x_{k+1}/I_k) - \text{densidade de previsão de estado}$$

$$p(y_{k+1}/I_k) - \text{densidade de previsão da saída}$$

A primeira densidade é obtida utilizando-se o modelo de estado e a segunda densidade é obtida utilizando-se as medidas e a densidade de previsão de estado.

4.4 Métodos Subótimos de Controle Estocástico

DUAL:-Sub-ótimo:Correções no controle não dual ou aproximação da equação de Bellman.

Não- DUAL:- Equivalência a Certeza (CE) ou Cauteloso.

4.4.1 Controlador não dual-CE

Este controlador é obtido utilizando o teorema da separação, isto é, a lei de controle é derivada resolvendo-se o problema determinístico, e na 'lei de controle resultante substitue-se os valores desconhecidos pelas suas médias. É uma lei de controle sub-ótima, com exceção do controlador linear quadrático gaussiano.

4.4.2 Controlador não dual Cauteloso(neutro)

A sequência de controle é calculada, supondo que esta sequência não interfere na incerteza futura.
Esta lei de controle é obtida minimizando um critério do tipo um passo à frente e supondo que:
- a partir de um certo instante não se vai ter mais medidas;
- a partir de um certo instante as medidas serão perfeitas.

A lei de controle obtida é função dos parâmetros estimados e da precisão. Neste tipo de controlador pode ocorrer o 'desligamento'.

4.4.3 Controlador Dual Sub-ótimo

Dois tipos de abordagens são utilizadas:
i)-Aproximação da Equação Recorrente;
ii)-Modificações no controlador cauteloso.

4.5 Sistem Linear com Perturbações Gaussianas e Custo Quadrático

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + G_k u_k + \omega_k$$
$$y_k = H_k x_k + v_k$$
$$\mathcal{E} v_k = \mathcal{E}\omega_k = \mathcal{E}\omega_k x_o^T = \mathcal{E} v_k \omega_k^T = \mathcal{E} v_k x_o^T = 0$$
$$\mathcal{E}\{\omega_k \omega_j^T\} = \Omega_k \delta_{kj}$$
$$\mathcal{E}\{v_k v_j^T\} = V_K \delta_{kj}$$

Otimizar

$$\min_{u(0\to n-1)} \mathcal{E}\{J\} = \min_{u(0\to n-1)} \mathcal{E}\{\sum_{k=0}^{n-1}(x_k^T R_k x_k + u_k^T Q_k u_k) + x_n^T R_n x_n\}$$

onde R_k é uma matriz semi-definida positiva. Q_k e R_n são matrizes definidas Positivas.

Lema:

$$\mathcal{E} x^T R x = \bar{x}^T R \bar{x} + tr(RX)$$

onde

$$X = \mathcal{E}\{(x-\bar{x})(x-\bar{x})^T\} \text{ e } \bar{x} = \mathcal{E}x$$

Prova:

$$\mathcal{E}\{(x-\bar{x})^T R(x-\bar{x})\} = \mathcal{E}x^T Rx - \mathcal{E}\bar{x}^T Rx - \mathcal{E}x^T R\bar{x} + \bar{x}^T R\bar{x}$$
$$\mathcal{E}\{(x-\bar{x})^T R(x-\bar{x})\} = \mathcal{E}x^T Rx - \bar{x}^T R\bar{x}$$

logo:

$$\mathcal{E}x^T Rx = \bar{x}^T R\bar{x} + \mathcal{E}\{(x-\bar{x})^T R(x-\bar{x})\}$$

Como:

$$(x-\bar{x})^T R(x-\bar{x}) = tr\{R(x-\bar{x})(x-\bar{x})^T\}$$

tem-se que:

$$\mathcal{E}x^T Rx = \bar{x}^T R\bar{x} + tr(RX)$$

O problema de otimização é resolvido utilizando programação dinâmica, isto é, minimizando-se, inicialmente, o critério no instante $k = n-1$:

$$S_{n-1}(I_{n-1}) = \min_{u_{n-1}}\{\mathcal{E}_{x_{n-1}}\{x_{n-1}^T R_{n-1} x_{n-1} + u_{n-1}^T Q_{n-1} u_{n-1}/I_{n-1}\}+$$

$$+\mathcal{E}_{y_n}\{\mathcal{E}_{x_n}\{x_n^T R_n x_n / I_n / I_{n-1} u_{N-1}\}\}\}$$

Aplicando o lema anterior com $\hat{x}_n = \mathcal{E}\{x_n/I_n\}$ tem-se que:

$$S_{n-1}(I_{n-1}) = \min_{u_{n-1}}\{\hat{x}_{n-1}^T R_{n-1}\hat{x}_{n-1} + tr(R_{n-1}X_{n-1}) + u_{n-1}^T Q_{n-1}u_{n-1} +$$

$$+\mathcal{E}_{y_n}(\hat{x}_n^T R_n \hat{x}_n / I_{n-1}u_{n-1}) + tr(R_n X_n)\}$$

onde X_n é a covariância do estimador $\hat{x}_n$.

Neste caso, em que o sistema é linear e as perturbações são gaussianas, o estimador $\hat{x}_n$ é obtido utilizando o filtro de Kalman, isto é:

$$\hat{x}_n = \Phi_{n-1}\hat{x}_{n-1} + G_{n-1}u_{n-1} + K_{F_n}\{y_n - H_n(\Phi_{n-1}\hat{x}_{n-1} + G_{n-1}u_{n-1})\}$$

ou

$$\hat{x}_n = \Phi_{n-1}\hat{x}_{n-1} + G_{n-1}u_{n-1} + K_{F_n}\epsilon_n$$

onde ϵ_n é a série de inovação, isto é:

$$\mathcal{E}\epsilon_n / I_{n-1} = 0$$

$$\mathcal{E}\epsilon_n\epsilon_n^T / I_{n-1} = H_n X_{n/n-1} H_n^T + V_n$$

$$S_{n-1}(I_{n-1}) = \min_{u_{n-1}}\{\hat{x}_{n-1}^T R_{n-1}\hat{x}_{n-1} + tr(R_{n-1}X_{n-1}) + u_{n-1}^T Q_{n-1}u_{n-1} +$$

$$+tr(R_n X_n) + [\Phi_{n-1}\hat{x}_{n-1} + G_{n-1}u_{n-1}]^T R_n[\Phi_{n-1}\hat{x}_{n-1} + G_{n-1}u_{n-1}] +$$

$$+\mathcal{E}_{y_n}(\epsilon_n^T K_{F_n}^T R_n K_{F_n}\epsilon_n / I_{n-1}u_{n-1})\}$$

$$= \min_{u_{n-1}}\{\hat{x}_{n-1}^T(R_{n-1} + \Phi_{n-1}^T R_n \Phi_{n-1})\hat{x}_{n-1} +$$

$$+u_{n-1}^T[Q_{n-1} + G_{n-1}^T R_n G_{n-1}]u_{n-1} + 2u_{n-1}^T G_{n-1}^T R_n \Phi_{n-1}\hat{x}_{n-1} + tr(R_n X_n) +$$

$$+tr(R_{n-1}X_{n-1}) + tr(R_n K_{F_n}\mathcal{E}\epsilon_n\epsilon_n^T K_{F_n}^T)\}$$

Definindo

$$Z_{n-1} = Q_{n-1} + G_{n-1}^T R_n G_{n-1}$$

$$T_{n-1} = G_{n-1}^T R_n \Phi_{n-1}$$

então:

$$u_{n-1}^{ot} = -Z_{n-1}^{-1}T_{n-1}\hat{x}_{n-1}$$

$$u_{n-1}^{ot} = -[Q_{n-1} + G_{n-1}^T R_n G_{n-1}]^{-1}G_{n-1}^T R_n \Phi_{n-1}\hat{x}_{n-1} = -K_{n-1}\hat{x}_{n-1}$$

O valor do custo mínimo é dado por:

$$S_{n-1}(I_{n-1}) = \hat{x}_{n-1}^T(P_{n-1} - T_{n-1}^T Z_{n-1}^{-1}T_{n-1})\hat{x}_{n-1} + tr(R_{n-1}X_{n-1}) +$$

$$+tr(R_nX_n)+tr(R_nK_{F_n}(V_n+H_nX_{n/n-1}H_n^T)K_{F_n}^T)$$

$$S_{n-1}(x_{n-1})=\hat{x}_{n-1}^TF_{n-1}\hat{x}_{n-1}+b_{n-1}$$

$$F_{n-1}=P_{n-1}-T_{n-1}^TZ_{n-1}^{-1}T_{n-1}$$

$$P_{n-1}=R_{n-1}+\Phi_{n-1}^TR_n\Phi_{n-1} \quad \text{e} \quad b_{n-1}=tr(\ldots)$$

Para $k=n-2$ tem-se que:

$$S_{n-2}(I_{n-2})=\min_{u_{n-2}}\{\mathcal{E}_{x_{n-2}}\{x_{n-2}^TR_{n-2}x_{n-2}+u_{n-2}^TQ_{n-2}u_{n-2}/I_{n-2}\}+$$

$$+\mathcal{E}_{y_{n-1}}\{\hat{x}_{n-1}^TF_{n-1}\hat{x}_{n-1}+b_{n-1}/I_{n-2}u_{n-2}\}\}$$

Em relação a otimização no instante $k=(n-1)$ tem-se uma equação equivalente com alteração nas seguintes matrizes: R_n por F_{n-1} e $tr(R_nX_n)$ por b_{n-1}.
Assim a solução no instante $k=(n-2)$ é dada por:

$$u_{n-2}^{ot}=-K_{n-2}\hat{x}_{n-2}$$

$$K_{n-2}=[Q_{n-2}+G_{n-2}F_{n-1}G_{n-2}]^{-1}G_{n-2}^TF_{n-1}\Phi_{n-2}$$

Para um instante de tempo qualquer k o controle é dado por:

$$u_k^{ot}=-K_k\hat{x}_k$$

$$K_k=[Q_k+G_kF_{k+1}G_k]^{-1}G_k^TF_{k+1}\Phi_k$$

$$F_k=R_k+\phi_k^TF_{k+1}(\Phi_k-G_kK_k)$$

com $F_n=R_n$.
O estimador de estado é dado por:

$$\hat{x}_{k+1}=\phi_k\hat{x}_k+G_ku_k+K_{F_k}\{y_{k+1}-H_k\hat{x}_{k+1/k}\}$$

$$K_{F_k}=X_{k/k-1}H_k^T[V_k+H_kX_{k/k-1}H_k^T]^{-1}$$

$$X_{k+1/k}=W_k+\Phi_kX_{k/k}\Phi_k^T$$

$$X_{k+1/k+1}=[X_{k+1/k}+H_{k+1}^TV_{k+1}^{-1}H_{k+1}]^{-1}$$

O custo mínimo é dado por:

$$\hat{x}_0^TF_0\hat{x}_0+tr(F_0X_0)+\sum_{k=0}^{n-1}tr(F_{k+1}W_k+P_k^*X_{k/k})$$

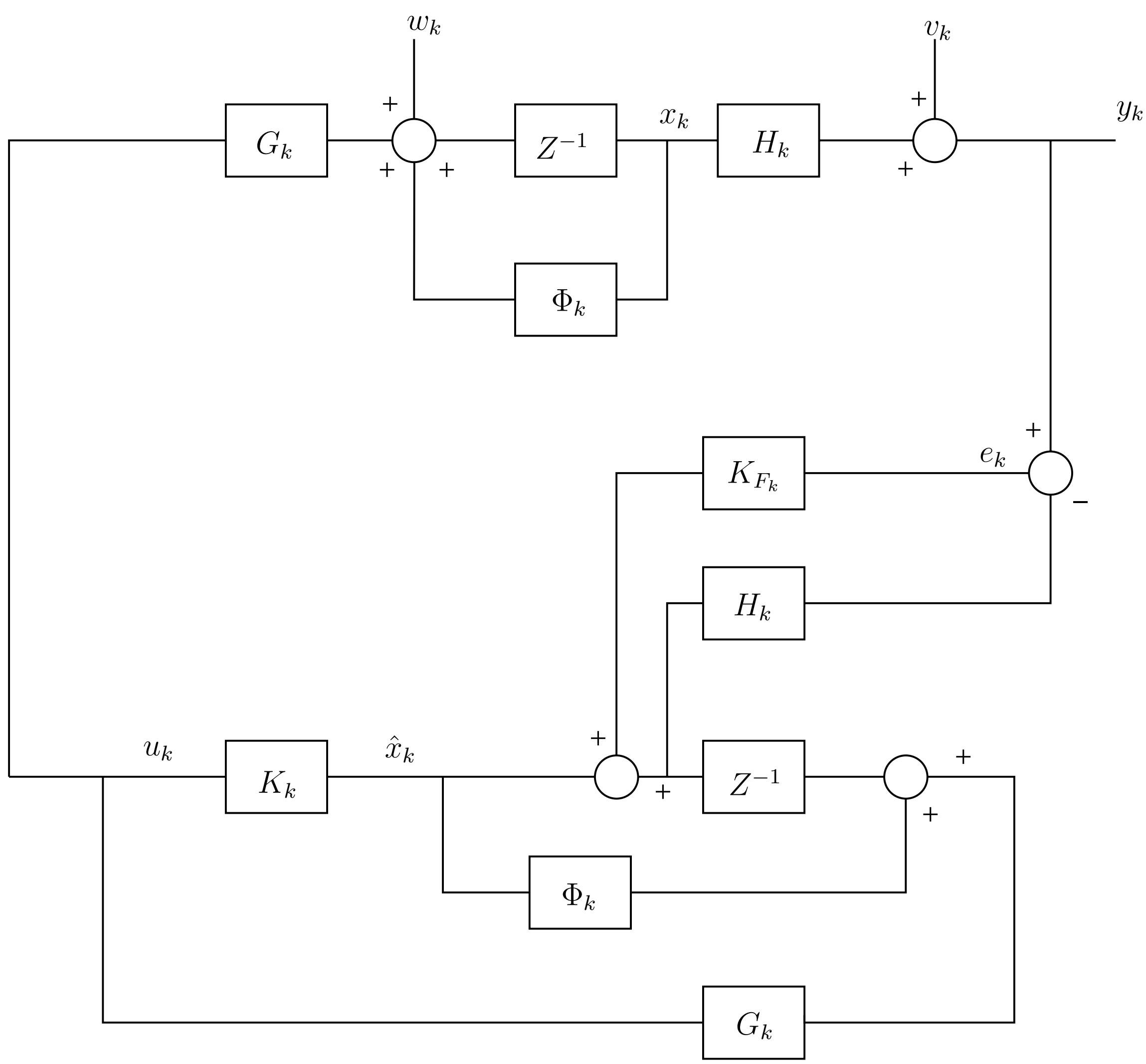
$$P_k^*=\Phi_k^TF_{k+1}\Phi_k+P_k-F_k$$

Nestas equações a matriz F_0 representa a sensibilidade do mínimo do critério em relação às condições iniciais;

As matrizes F_{k+1} fornecem a sensibilidade do mínimo do critério em relação às perturbações no sistema;

A matriz P_k^* fornece a sensibilidade do mínimo do critério em relação à incerteza na estimação no estado;

A lei de controle é obtida como se o estado x_k fosse mensurável, isto é, resolve-se dois problemas separados: Estimação de Estado e Controle Ótimo Determinístico.



4.6 Controle Linear Quadrático em Sistemas Invariantes no Tempo

Seja o Sistema:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + G u_k + w_k$$

$$y_k = H x_k + v_k$$

E o seguinte critério a otimizar:

$$J = \mathcal{E}\{\sum_{k=0}^{n-1}(x_k^T R x_k + u_k^T Q u_k) + x_n^T R_n x_n\}$$

A lei de controle é dada por:

$$u_k^{ot} = -K_k \hat{x}_k$$

$$K_k = (Q + G^T F_{k+1} G)^{-1} G^T F_{K+1} \Phi$$

$$F_k = R + \Phi^T F_{k+1}(\Phi - G K_k) \text{ com } F_n = R_n$$

O estimador de estado é dado por:

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi \hat{x}_k + G u_k + K_{F_k}\{y_{k+1} - H \hat{x}_{k+1/k}\}$$

A solução de regime é:

$$F_r = R + \Phi^T F_r (\Phi - G K_r)$$

$$F_r = R + \Phi^T F_r (\Phi - G(Q + G^T F_r G)^{-1} G^T F_r \Phi$$

$$K_r = (Q + G^T F_r G)^{-1} G^T F_r \Phi$$

Neste caso a dinâmica do sistema em malha fechada é dada por:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + G u_k + w_k$$

$$x_{k+1} = \Phi x_k + (-G K_r \hat{x}_k) + w_k$$

e

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi \hat{x}_k + G u_k + K_{F_r}\{y_{k+1} - H \hat{x}_{k+1/k}\}$$

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi \hat{x}_k - G K_r \hat{x}_k + K_{F_r} H \Phi x_k + K_{F_r} H w_k + K_{F_r} v_{k+1} - K_{F_r} H \Phi \hat{x}_k$$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|r} \Phi & -G K_r \\ \hline K_{F_r} H \Phi & \Phi - G K_r - K_{F_r} H \Phi \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_k \\ \hat{x}_k \end{bmatrix} +$$

$$+\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline K_{F_r}H & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} w_k \\ v_{k+1} \end{array}\right]$$

Outra representação do sistema em malha fechada pode ser obtida utilizando o erro de estimação de estado, isto é:

$$\tilde{x}_{k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}$$

A utilização desta nova variável corresponde à seguinte transformação de similaridade

$$\left[\begin{array}{c} x_k \\ \tilde{x}_k \end{array}\right] = T\left[\begin{array}{c} x_k \\ \hat{x}_k \end{array}\right]$$

$$T = \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ I & -I \end{array}\right]$$

Nesta nova base a representação de estado é dada por:

$$\bar{A} = T^{-1}AT \ \text{ com } \ T^{-1} = T$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|r} \Phi & -GK_r \\ \hline K_{F_r}H\Phi & \Phi - GK_r - K_{F_r}H\Phi \end{array} \right] \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|r} \Phi - GK_r & -GK_r \\ \hline 0 & \Phi - K_{F_r}H\Phi \end{array} \right]$$

Portanto os polos do sistema em malha fechada são as raízes de :

$$det(zI - \bar{A}) = det(zI - \Phi + GK_r)det(zI - \Phi + K_{F_r}H\Phi) = 0$$

isto é, se $x, \hat{x} \in R^n$ tem-se $2n$ polos onde n polos correspondem ao sistema sem filtro e n polos correspondem ao filtro de Kalman. Assim mais uma vez se verifica a separação entre as etapas de controle e estimação.

4.7 Filtro de Kalman

Seja o sistema linear descrito por

$$x_{k+1} = \Phi x_k + Gu_k + w_k$$

$$y_k = Hx_k + v_k$$

$$\mathcal{E}x_0 = 0$$

$$\mathcal{E}x_0x_0^T = R_0$$

$$\mathcal{E}w_kw_k^T = R_1$$

$$\mathcal{E}v_kv_k^T = R_2$$

$$\mathcal{E}w_kv_k^T = R_{12}$$

O objetivo é estimar o estado x_{k+1} ($\hat{x}_{k+1/k}$) utilizando uma combinação linear do estimador no instante anterior $\hat{x}_{k/k-1}$ e as medidas disponíveis no instante k.
Da equação do observador de estado pode-se escrever que o estimador de estados é dado por:

$$\hat{x}_{k+1/k} = \Phi\hat{x}_{k/k-1} + Gu_k + K_{F_k}\{y_{k+1} - H\hat{x}_{k/k-1}\}$$

Para o observador de estado o ganho K_{F_k} é selecionado tal que os polos do observador tenham uma dinâmica 'mais rápida' do que os polos do sistema em malha fechada. Para o filtro de Kalman o ganho $K_{F_{k+1}}$ é selecionado minimizando a variância do erro. Seja o erro dinâmico dado por:

$$\tilde{x}_{k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k}$$

$$\tilde{x}_{k+1} = \Phi\tilde{x}_k + w_k + K_{F_k}\{y_{k+1} - H\hat{x}_{k/k-1}\}$$

$$\tilde{x}_{k+1} = (\Phi - K_{F_k}H)(\tilde{x}_k) + w_k - K_{F_k}v_k$$

$$\tilde{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} I & -K_{F_k} \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} \tilde{x}_k + \begin{pmatrix} w_k \\ v_k \end{pmatrix} \right]$$

Minimizando a variância de $\tilde{x}_{k+1}$ resulta em:

$$P_{k+1} = \min_{K_{F_k}} \mathcal{E}\tilde{x}_{k+1}\tilde{x}_{k+1}^T$$

$$P_{k+1} = \min_{K_{F_k}} \begin{bmatrix} I & -K_{F_k} \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} P_k \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} R_1 & R_{12} \\ R_{12}^T & R_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} I \\ -K_{F_k} \end{pmatrix}$$

$$P_{k+1} = \min_{K_{F_k}} \begin{bmatrix} I & -K_{F_k} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi P_k \Phi^T + R_1 & \Phi P_k h^T + R_{12} \\ H P_k \Phi^T + R_{12}^T & H P_k H^T + R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ -K_{F_k} \end{pmatrix}$$

Cuja solução é dada por:(Exercício obter K_{F_k}):

$$K_{F_k} = (\Phi P_k H^T + R_{12})(H P_k H^T + R_2)^{-1}$$

As equações do filtro de Kalman são:

$$\hat{x}_{k+1/k} = \Phi \hat{x}_{k/k-1} + G u_k + K_{F_k}\{y_{k+1} - H \hat{x}_{k/k-1}\}$$

$$K_{F_k} = (\Phi P_k H^T + R_{12})(H P_k H^T + R_2)^{-1}$$

$$P_{k+1} = \Phi P_k \Phi^T + R_1 - K_{F_k}(H P_k H^T + R_2){K_{F_k}}^T$$

com

$$P_0 = R_0$$