UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

Cadeias de Markov
a Tempo Discreto

IA-703 Controle Adaptativo e Estocástico

João Bosco R. do Val

25 de setembro de 2001

arquivo Cadeias_01.tex

Cadeias de Markov

Sejam os conjuntos E (espaço de estado) e K (índice), enumeráveis ou finitos.

O processo estocástico $\{X_k(\omega),\ k \in K\}$ é uma Cadeia de Markov (CM) se:

$$\begin{aligned} & P(X_{k+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_k = i_k) \\ & = P(X_{k+1} = j | X_k = i_k), \quad \forall k \in K \text{ e } i_0, i_1, \ldots, i_k \in E \end{aligned} \tag{1}$$

(1) caracteriza a propriedade de Markov.

Suponha que $E = \{1, 2, \ldots, N\}$. Seja $q = (q_1 \cdots q_N)' \in \mathbb{R}^N$, $q_i \geq 0$, $\sum_{i \in E} q_i = 1$:

$$P(X_0 = i) = q_i \quad \text{(distribuição inicial)}$$

Seja $p_{ij} \geq 0$, $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$, $\forall i \in E$:

$$P(X_{k+1} = j | X_k = i) = p_{ij},\ \forall i, j \in E$$

e $\forall k \in K$, isto é CM é homogênea.

$$\begin{cases} \text{vetor de probabilidade inicial: } q \\ \text{matriz de probabilidade de transição: } P = [p_{ij}] \text{ (matriz estocástica)} \end{cases}$$

Um parentesis: Processos caracterizados pela função de distribuição de dimensão finita. Seja $K_0 = \{k_1, k_2, \dots k_n\} \subset K$

$$\text{fddf: } F_{K_0}(i_1, i_2, \dots, i_n) = P(X_{k_1} < i_1, X_{k_2} < i_2, \dots, X_{k_n} < i_n)$$

Fato 1: Um processo estocástico com parâmetros discretos é determinado por sua familia de fddf's

Definição: Um família de fddf's é COMPATÍVEL se $K_0 \subset K_1$ implica em

$$F_{K_0}(i_1, i_2, \dots, i_n) = F_{K_1}(i_1, i_2, \dots, i_n, \infty, \dots, \infty)$$

Fato 2: (Kolmogorov) Para qualquer família de fddf's que seja compatível, existe um processo a parâmetros discretos possuindo essa família como sua própria.

fddf's para a CM:

$$\begin{aligned}
&P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) \\
&= P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\
&= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1})
\end{aligned}$$

por indução,

$$\begin{aligned}
&P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_{n-1} = i_{n-1} | X_{n-2} = i_{n-2}) \\
&\cdots P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) P(X_0 = i_0) \\
&= p_{i_{n-1}, i_n} p_{i_{n-2}, i_{n-1}} \dots p_{i_0, i_1} q_{i_0}
\end{aligned}$$

Seja

$$p_{ij}(n) := P(X_{k+n} = j | X_n = i)$$

com $p_{ij}(0) = 1_{\{i=j\}}, p_{ij}(1) =$ p_{ij},

$$\begin{aligned} p_{ij}(2) &= P(X_2 = j, X_1 < \infty | X_0 = i) \\ &= \sum_{l \in E} P(X_2 = j | X_1 = l) P(X_1 = l | X_0 = i) \\ &= \sum_{l \in E} p_{lj} p_{il} \end{aligned}$$

e em geral teremos

$$p_{ij}(n+m) = \sum_{l \in E} p_{lj}(m) p_{il}(n)$$

(Equação de Chapman-Kolmogov)

1) Satisfeita por processos markovianos

2) Verifica a compatibilidade de fddf's

3) Cálculo de probabilidades de transição e valor esperado:

Seja $P(k) := [p_{ij}(k)]$ então $P(k) = P^k$,
Se $p(k) = (p_1(k)\, p_2(k) \cdots p_N(k))'$ com $p_i(k) := P(X_k = i)$, então

$$
\begin{aligned}
p(k) &= (q' \cdot P^k)' = P^{k'} \cdot q \\
E^q[\phi(X_k)] &= \sum_{i \in E} \phi_i \, p_i(k) \\
&= < \phi, p(k) > = < \phi, P^{k'} q > = < P^k \phi, q >
\end{aligned}
$$

<u>Exemplo:</u> Falência de um jogador.

Propriedades Topológicas

DEFINIÇÃO: Estado j é acessível do estado i se existir $M \geq 0$ tal que $p_{ij}(M) > 0$.

DEFINIÇÃO: Estados j e i são COMUNICANTES se j é acessível de i e i é acessível de j. (Notação: $i \leftrightarrow j$).

$$i \leftrightarrow i,$$
$$i \leftrightarrow j \quad \Rightarrow \quad j \leftrightarrow i,$$
$$i \leftrightarrow k \; k \leftrightarrow j \quad \Rightarrow \quad j \leftrightarrow i$$

(propriedades de classe comunicante)

DEFINIÇÃO: Irredutibilidade. Se existir apenas uma classe comunicante.

Período

Considere uma cadeia irredutível. É possível encontrar uma partição de E em d classes $C_0, C_1, \ldots, C_{d-1}$, tal que para todo $k, i \in C_k$

$$\sum_{j \in C_{k+1}} p_{ij} = 1, \qquad (C_d = C_0)$$

e d é o maior desses números. d é o PERÍODO DA CADEIA. Se $d = 1$ a cadeia é chamada APERIÓDICA.

Estrutura da matriz de transição da cadeia periódica. Após uma reordenação de estados:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & A_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 \\ A_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (d = 4)$$

Estacionariedade

Noção central de estabilidade

DEFINIÇÃO: Uma distribuição satisfazendo

$$\pi^T = \pi^T P$$

é chamada DISTRIBUIÇÃO ESTACIONÁRIA da matriz de transição P. É equivalente as equações

$$\pi(i) = \sum_{j \in E} \pi(j) p_{ji}, \qquad \forall i \in E$$

(eq. de balanço global).

Exemplo 1 Passeio aleatório simétrico

$$\pi(i) = \frac{1}{2}\pi(i-1) + \frac{1}{2}\pi(i+1)$$

Dados $\pi(0)$ e $\pi(1)$, então

$$\pi(i) = \pi(0) + (\pi(1) - \pi(0))i$$

mas π não é distribuição!

Exemplo 2 $P = I$, matriz identidade. Então qualquer distribuição q satisfaz a condição de estacionariedade.

Exemplo 3 Nascimento e Morte com barreiras com reflexão, $E = \{1, 2, \ldots, N\}$,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & & & \\ & q_2 & r_2 & p_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & q_{N-1} & r_{N-1} & p_{N-1} \\ & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

EXEMPLO 4 Nascimento e Morte com uma barreira em zero com reflexão, $E = \{1, 2, \ldots\}$,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & & \\ & q_2 & r_2 & p_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

com $q_i = q \geq 0$, $r_i = r \geq 0$ $p_i = p \geq 0$ e $p + q + r = 1$. Neste caso existirá distribuição de equilíbrio se e somente se

$$\frac{p}{q} < 1$$

EXERCÍCIO Utilizando a função característica para uma distribuição de variável aleatória discreta

$$\Psi_x(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) z^k$$

calcule o número médio da população do Exemplo 4 supondo $p/q < 1$. Plote o número medio versus a razão p/q.

Classificação de Estados

Para quaisquer estados i e j e $X_0(\omega) = i$, definimos

$$T_{ij}(\omega) = \inf\{k \in K : X_k(\omega) = j\}$$

Note que $P(T_{ij} = 1) = p_{ij}$ e $P(T_{ij} = k) = \sum_{l \neq j} p_{il} P(T_{lj} = k - 1)$.

Definições:

1) Um estado j é denominado recorrente, se $P(T_{jj} < \infty) = 1$.

   Caso $P(T_{jj} < \infty) < 1$ o estado j é denominado transiente.

2) As propriedades acima são propriedades de classe:

   Teorema: Se $i \leftrightarrow j$ então ambos são recorrentes ou ambos são transientes.

   Conseqüência: CM com número de estados finitos $\rightarrow$ pelo menos um estado deve ser recorrente.

3) Um estado recorrente j é denominado positivo se $E[T_{jj}] < \infty$ e nulo se $E[T_{jj}] = \infty$.

4) Observe que se j é positivo $\Rightarrow$ j é recorrente

   e se j é transiente $\Rightarrow$ j é nulo.

5) Um estado recorrente j é denominado PERIÓDICO com período δ se $\delta \geq 2$ é o menor inteiro para o qual $P(\cup_{k=1}^{\infty}\{T_{jj} = k\delta\}) = 1$. Caso $\delta = 1$, j é chamado de APERIÓDICO.

6) Um estado é chamado ERGÓDICO se é recorrente, não nulo e aperiódico.

7) As propriedades acima são comuns a todos os estados de uma classe comunicante.

TEOREMA Estado $i \in E$ é recorrente, equivale a dizer

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty;$$

estado j é transiente, equivale a dizer

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty.$$

EXEMPLO Passeio aleatório unidimensional. $p_{i,i+1} = p, \ p_{i,i-1} = 1 - p$. Se $p = \frac{1}{2}$ é recorrente, se $p \neq \frac{1}{2}$ é transiente.

EXEMPLO Nascimento e morte com barreira em zero.

$$\text{Se } p/q \begin{cases} < 1, & \text{a cadeia é irredutível, recorrente positiva;} \\ > 1, & \text{a cadeia é irredutível, recorrente nula.} \end{cases}$$

Probabilidades Limites e Estacionariedade

Considere uma CM com distribuição inicial q. O vetor p é a DISTRIBUIÇÃO LIMITE se

$$\lim_{k\to\infty} P(X_k = i) = p_i, \quad \forall i \in E \text{ e escolha } q$$

TEOREMA: Para uma CM a distribuição limite existe com

$$p_i = \lim_{k\to\infty} P(X_k = i) = \frac{1}{E[T_{ii}]} > 0, \quad \forall i \in E$$

se e somente se

(a) a matriz de transição P é irredutível

(b) os estados são ergódicos

TEOREMA: Se P é irredutível e existe uma distribuição estacionária

$$\pi' = \pi' P, \quad \sum_{i\in E} \pi(i) = 1$$

então todos estados são ergódicos e

$$\lim_{k\to\infty} P(X_k = i) = p_i = \pi(i), \quad \forall i \in E.$$