Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

EA722 - Laboratório de Controle e Servomecanismos

Experiência 5:

Emulador: Rejeição de Distúrbios

Retilíneo, Torcional e Levitador: Controle Co-alocado

Pêndulo Invertido: Controle em Cascata

8 de dezembro de 2016

Sumário

1 Emulador Industrial: Rejeição de Distúrbios **2**
- 1.1 Configuração do sistema . . . 3
  - 1.1.1 Procedimento experimental – Parte 1: Rejeição de distúrbios . . . 4
  - 1.1.2 Procedimento experimental – Parte 2: Comportamento servo . . . 5
- 1.2 Pré-relatório da Experiência 6 . . . 5
  - 1.2.1 Linhas gerais do projeto . . . 6
  - 1.2.2 Detalhamento . . . 7

2 Sistema Retilíneo: Controle Co-alocado **9**
- 2.1 Sistema com dois graus de liberdade . . . 9
- 2.2 Configuração . . . 10
- 2.3 Controle co-alocado . . . 10
  - 2.3.1 Procedimento experimental . . . 10
  - 2.3.2 Exercícios sugeridos . . . 11
- 2.4 Pré-relatório da Experiência 6 . . . 11
  - 2.4.1 Linhas gerais do projeto . . . 12
  - 2.4.2 Detalhamento . . . 13

3 Sistema Torcional: Controle Co-alocado **15**
- 3.1 Sistema com dois graus de liberdade . . . 15
- 3.2 Configuração . . . 15
- 3.3 Controle co-alocado . . . 16
  - 3.3.1 Procedimento experimental . . . 17
  - 3.3.2 Exercícios sugeridos . . . 17
- 3.4 Pré-relatório da Experiência 6 . . . 18
  - 3.4.1 Linhas gerais do projeto . . . 18
  - 3.4.2 Detalhamento . . . 19

4 Controle em cascata do pêndulo invertido **21**
- 4.1 Controle PD do pêndulo invertido . . . 21
- 4.2 Controle do ângulo Θ por alocação de pólos . . . 23
- 4.3 Atenuação de ruídos . . . 25
- 4.4 Configurações do pêndulo invertido . . . 25

4.5 Procedimento experimental 26
4.5.1 Controle PD 26
4.5.2 Alocação de pólos para a planta estável 26
4.5.3 Alocação de polos para a planta instável 27
4.6 Pré-relatório da Experiência 6 28
4.6.1 Modelo linearizado do pêndulo invertido com os dois graus de liberdade 28
4.6.2 Linhas gerais do projeto 29
4.6.3 Detalhamento 30

5 Sistema Levitador: Controle Co-alocado 32
5.1 Sistema com dois graus de liberdade 32
5.2 Configuração 33
5.3 Controle co-alocado 33
5.3.1 Procedimento experimental 33
5.3.2 Exercícios sugeridos 36
5.4 Pré-relatório da Experiência 6 36
5.4.1 Linhas gerais do projeto 36
5.4.2 Detalhamento 37

1 Emulador Industrial: Rejeição de Distúrbios

O objetivo desta experiência é iniciar o estudo de variações de parâmetros e de certas características que estão presentes na maioria das implementações práticas de sistemas de controle. Algumas destas características são discutidas brevemente a seguir.

1. **Efeito da relação de engrenagens e inércia**. Afeta diretamente o ganho do sistema e a dinâmica em malha fechada. A situação é similar a observada quando se pedala uma bicicleta com várias marchas (relações de engrenagens) e, mantendo-se a mesma força sobre os pedais, troca-se de marcha. A velocidade da bicicleta aumenta ou diminui dependendo da troca efetuada. Para manter a mesma velocidade, a atuação nos pedais (controlador) deve ser revista para levar em conta a nova relação de engrenagens (planta);

2. **Efeito de fricção**. Normalmente modelado como estático, cinématico (Coulomb) ou viscoso, em pequenas quantidades ajuda na estabilidade do sistema, mas em grandes quantidades *acentuam* características não-lineares da planta (exceto o atrito viscoso), e podem deteriorar o desempenho do sistema de controle do ponto do vista de rastreamento e regulação;

3. **Efeito de distúrbios**. Uma característica importante de um sistema de controle por realimentação é sua capacidade de rejeitar forças ou torques que tendam a tirar o sistema do seu valor de referência (*set-point*, sinal comandado) ou dificultar o rastreamento da trajetória comandada. Um exemplo típico é o transporte de material através de uma esteira que se desloca com velocidade constante (set-point). Toda vez que se coloca ou retira material da esteira ocorre uma variação de carga (distúrbio). Um bom controlador deve rejeitar o distúrbio, no sentido de que em regime ($t \to \infty$), o efeito de se colocar ou retirar material da esteira cessa e a velocidade retorna ao valor desejado;

4. **Efeito de saturação no controle**. A saturação de um dispositivo ocorre quando a sua saída mantém-se em algum valor positivo (negativo) para todas as entradas acima (abaixo)

de um certo limite. A saturação pode ocorrer devido ao sinal de controle exceder a faixa de operação do atuador (por exemplo, ± 10 volts). Em geral, os atuadores são construídos para saturarem numa região segura, onde não haja danos para os componentes do atuador. O efeito de saturação no sinal de controle pode comprometer completamente o desempenho do sistema de controle e no limite levar a instabilidade da planta. A ênfase em se projetar controladores que demandem pequeno esforço está ligada diretamente a necessidade de se manter o sinal de controle dentro da faixa de operação do atuador e em alguns casos economizar energia;

5. **Efeito de amostragem em tempo discreto**. Muitos processadores digitais de alto desempenho permitem taxas de amostragem suficientemente elevadas para que o sistema de controle possa ser analisado, projetado e implementado como um sistema contínuo, quando na verdade apenas as variáveis medidas são contínuas. Em alguns casos, por limitações tecnológicas ou econômicas, a taxa de amostragem está limitada a valores que inviabilizam a análise contínua. Deve-se então trabalhar com o modelo discretizado da planta (dependente da taxa de amostragem adotada) e tratar o sistema global (planta+controlador) como um sistema discreto no tempo.

Nesta experiência será estudado um dos principais efeitos mencionados acima: rejeição de distúrbios.

1.1 Configuração do sistema

Os resultados experimentais serão com os discos de atuação e carga conectados utilizando as correias rígidas, com a seguinte configuração e valores de parâmetros:

$k_{hw} = 5{,}76$ N-m/rd	ganho de hardware
$J_{dd} = 0,00041$ kg-m^2	momento inércia do disco de atuação
$J_{d\ell} = 0,0063$ kg-m^2	momento inércia do disco de carga
$n_{pd} = 18$	no. de dentes da engrenagem conectada ao disco de atuação
$n_{p\ell} = 24$	no. de dentes da engrenagem conectada ao disco de carga
$g_r = 4,5, \;\; g'_r = 1,5$	relação de velocidades $4,5:1^\dagger$
$m_{wd} = 2 \times 0,212$ kg	massa total sobre o disco de atuação
$r_{wd} = 0,015$ m	raio dos pesos sobre o disco de atuação
$d_{wd} = 5{,}0$ cm	distância das massas ao centro do disco de atuação
$J_{wid} = m_{wd}(d_{wd}^2 + \frac{1}{2}r_{wd}^2)$	
$J_d = J_{dd} + J_{wid}$	momento de inércia total no disco de atuação
$m_{w\ell} = 4 \times 0,500$ kg	massa total sobre o disco de carga
$r_{w\ell} = 0,0495/2$ m	raio dos pesos sobre o disco de carga
$d_{w\ell} = 0,10$ m	distância das massas ao centro do disco de carga
$c_\ell = 0,005$ N-m/rad/seg	coeficiente de atrito no disco de carga
$c_d = 7,38 \times 10^{-4}$ N-m/rad/seg	coeficiente de atrito no disco de atuação
$J_{wi\ell} = m_{w\ell}(d_{w\ell}^2 + \frac{1}{2}r_{w\ell}^2)$	
$J_\ell = J_{d\ell} + J_{wi\ell}$	momento de inércia total no disco de carga
$J_p = 78 \times 10^{-6}$	inércia do pino SR
$J_d^* = J_d + J_p(g'_r)^{-2} + J_\ell(gr)^{-2}$	inércia total no disco de atuação
$c_d^* = c_d + c_l(gr)^{-2}$	coeficiente de atrito no disco de atuação

† obtida com engrenagens com 18 dentes na atuação e 24 dentes na carga. Utilizar as correias #140 e #250.

Desprezando-se as inércias das correias, obtenha o modelo dinâmico da planta incorporando o ganho de *hardware* e a inércia total (isto é, $k_{hw}/(J_d^* s^2)$) referente à configuração acima.

1.1.1 Procedimento experimental – Parte 1: Rejeição de distúrbios

Nota: Os símbolos ⓖ , ⓣ , ⓓ e ⓢ indicam a necessidade de produção de um gráfico, desenvolvimento teórico, diagrama simulink e script matlab, respectivamente.

No procedimento experimental a seguir, investiga-se o desempenho de três controladores distintos com respeito à capacidade de rejeição de distúrbios de baixa e alta frequências. A planta deve ser configurada como descrito na seção anterior. Os controladores são os seguintes:

C1: Controlador PD com $f_n = 2$ Hz, $\xi = 0.707$ e realimentação do Encoder #1. Parâmetros do PD: $k_p = 0.08,\ k_d = 0.009$;

C2: Controlador PD do item C1, com a incorporação da ação integral: $k_i = 1.0$;

C3: Controlador PD do item C1, mais um filtro *lead*

$$F(s) = \frac{n_0 + n_1 s}{d_0 + d_1 s},$$

projetado de acordo com as especificações: zero em 0.2 Hz, pólo em 1.0 Hz e ganho DC igual a 1 ⓣ .

1. Ajuste um distúrbio senoidal dependente do tempo (**Sinusoidal (time)**) de **0.5 volts**, **0.1 Hz** e **30000 ms** de duração. Estabelaça a frequência de amostragem da aquisição de dados a cada **20-50 ciclos** para evitar a geração de arquivos de dados muito grandes. Introduza os valores de k_p e k_d do controlador C1 através da opção **PID** com realimentação do **Encoder #1** e **Ts=0.00442 s**. Ajuste um degrau de malha fechada de amplitude **0 (zero)**, duração de **30000 ms** e **1 (uma)** repetição. Isto habilita o sistema a adquirir dados durante a regulação da malha fechada. Execute esta regulação para os controladores C1 e C2, certificando-se que a caixa **Include Sinusoidal Disturbance** está ativada. Exporte e plote (usando o script `plotRawData.m`) os dados do **Encoder #2** ⓖ ⓖ ;

2. Introduza o controlador C3 através da opção **PID+Notch** da caixa de diálogo **Setup Control Algorithm**. Execute a mesma regulação do passo anterior, exportando e plotanto os mesmos dados ⓖ ;

3. Repita os dois passos anteriores alterando a frequência de distúrbio para **2.0 Hz**. Pode-se reduzir a duração do degrau para **10000 ms** e aumentar a frequência de aquisição de dados para **10-20 ciclos** ⓖ ⓖ ⓖ ;

4. Considere o diagrama de blocos da Fig. 1. Obtenha a função de transferência de malha aberta

$$\frac{N_{ol}(s)}{D_{ol}(s)} = K(s) k_{hw} P(s)$$

e a função de transferência de malha fechada $\Theta_1(s)/T_d(s)$ para cada controlador ⓣ . Plote os diagramas de Bode das funções de transferência de malha aberta (três ⓖ na mesma figura usando o comando `subplot`) e fechada (três ⓖ na mesma figura usando o comando `subplot`) para cada controlador. Justifique as características de atenuação de distúrbios de cada controlador a partir dos seus diagramas de Bode ⓣ .

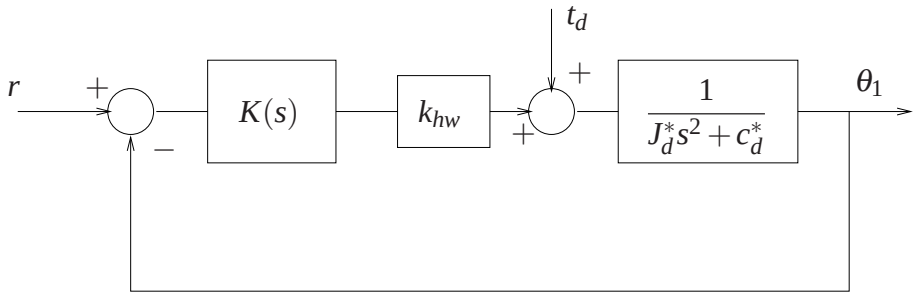

Figura 1: Controle em malha fechada.

1.1.2 Procedimento experimental – Parte 2: Comportamento servo

No procedimento experimental a seguir, verifica-se o desempenho dos controladores da seção anterior quanto à capacidade de rastreamento da entrada de referência (comportamento servo). Para garantir a capacidade de rastreamento do controlador com o ajuste proporcionado pelo filtro *lead*, combina-se este filtro com o controlador com parte integral, resultando na configuração:

C4: Controlador do item C2, mais filtro *lead* do item C3.

5. Implemente os quatro controladores com entrada de distúrbio nula e obtenha a resposta a um degrau de amplitude **2000 counts**, **dwell time 2000ms** e uma repetição. Plote as saídas do **Encoder # 1, Control Effort** e **Commanded Position** para os quatro controladores (4 ⓖ). De preferência, usar o comando `plotyy`.

6. Repita o item anterior utilizando uma entrada rampa com as características: **velocity 20000, distance 8000 e dwell time 1200**. (4 ⓖ)

7. Verifique nos gráficos do item 5 se houve saturação do controlador através das curvas de *control effort* obtidas ⓣ .

8. Utilizando o Matlab, plote o diagrama de Bode da função de transferência do sistema em malha fechada com controlador PD em **C1** ⓖ , com o controlador PD mais filtro *lead* do item **C3** ⓖ e PID mais filtro *lead* do item **C4** ⓖ . Verifique o posicionamento do pólo e do zero do filtro *lead* com relação as frequências para as quais o módulo da função de transferência em malha aberta com os controladores acima cruza o valor de 0 dB. Comente sobre as margens de fase de cada controle, e interprete as respostas temporais correspondentes obtidas nos itens 5 e 6 ⓣ . Repita a questão anterior para a resposta em frequência em malha fechada, comentando sobre as freqüências de corte de cada controlador, e interprete as respostas temporais correspondentes obtidas nos itens 5 e 6 ⓣ .

1.2 Pré-relatório da Experiência 6

O *controle não-co-alocado* será objeto de estudos na Experiência 6 e baseia-se na existência de uma malha interna de controle de velocidade angular θ_1 do disco de atuação, responsável pelo ajuste do amortecimento. O deslocamento θ_1 é a variável que exerce a ação sobre a variável de saída θ_2, por intermédio da correia flexível. De fato, é possível escrever a função de transferência entre $\Theta_2(s)/T(s)$ na forma

$$\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = k_{hw}\frac{N_1(s)}{D(s)} \cdot \frac{N_2(s)}{N_1(s)},$$

onde

$$N_1(s) = J_\ell s^2 + c_2 s + k, \quad N_2(s) = k/g_r$$
$$D(s) = J_d^* J_\ell s^4 + (c_2 J_d^* + c_1 J_\ell)s^3 + [(J_d^* + J_\ell g_r^{-2})k + c_1 c_2]s^2 + (c_1 + c_2 g_r^{-2})ks.$$

Note que $T(s)$ tem sentido de torque aplicado, mas está expresso em unidades apropriadas ao uso no ECP, em vista da constante k_{hw}.

1.2.1 Linhas gerais do projeto

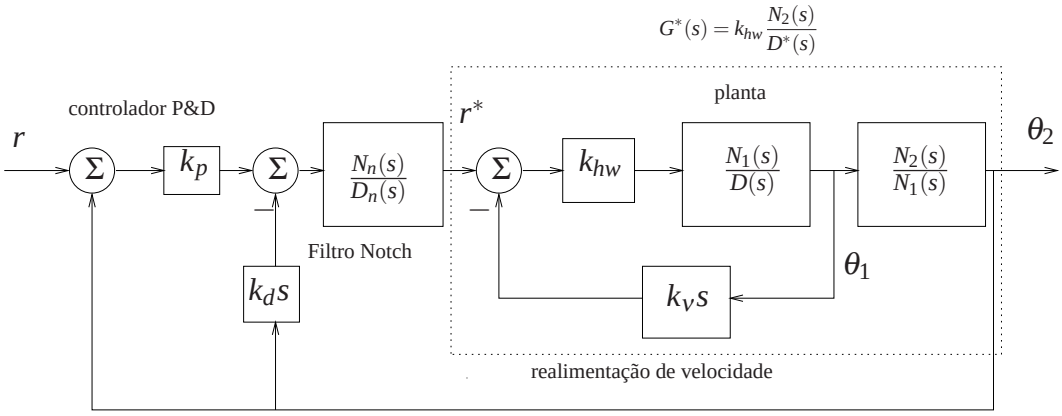

Figura 2: Diagrama para o controle não-co-alocado.

Adotaremos o esquema de controle representado na Fig. 2 e a determinação dos controladores será feito da seguinte maneira:

a. Calcula-se inicialmente o ganho k_v, utilizando-se o lugar das raízes (*root locus*) da malha interna, de modo que o amortecimento dos pólos em malha fechada de $\theta_1(s)/R^*(s)$ seja o maior possível;

b. Obtém-se a função de transferência $G^*(s)$, representada pela linha pontilhada na Fig. 2;

c. Calculam-se os parâmetros do filtro *notch* $N_n(s)/D_n(s)$ de modo que:

   1. os dois zeros do filtro cancelem dois pólos de $G^*(s)$ (tipicamente pólos pouco amortecidos), isto é, raízes de $D^*(s)$ complexas conjugadas.

   2. o filtro possua dois pares de pólos complexos conjugados de freqüência natural $f_{n1} =$ 5Hz e $f_{n2} = 8$Hz respectivamente, e $\xi = \sqrt{2}/2$ para ambos os pares.

   3. o coeficiente do termo de maior grau do polinômio $D_n(s)$ deve ser 1 (polinômio *mônico*) e o ganho estático (DC) da função de transferência do filtro deve ser unitário;

d. Os parâmetros do controlador P&D devem ser obtidos com o auxílio do diagrama do lugar das raízes *root locus*, adotando-se o critério de máximo amortecimento para os pólos dominantes em malha fechada.

e. A implementação do filtro *notch* e controlador P&D será realizada utilizando a forma geral **General Form** do software do ECP, com a utilização dos polinômios $t(s)$, $s(s)$ e $r(s)$.

1.2.2 Detalhamento

Considere os passos a seguir para a realização do projeto do controle não-co-alocado. Adote os valores numéricos listados no inicio da seção 1.1, com as seguintes alterações e acréscimos:

$m_{wd} = 0$	massa sobre o disco de atuação,
$g_r = 4,\ g'_r = 2$	relação de velocidades $4:1^{\dagger}$,
$k = 8.45$	constante elástica da correia flexível.

† obtida com engrenagens com 24 dentes na atuação e 36 dentes na carga.

Projeto da realimentação do disco de atuação:

Escreva um programa Matlab para executar os seguintes passos:

1. Implemente as funções de transferências da planta utilizando os valores numéricos para definir $\theta_1(s)/R^*(s)$,
2. Determine através do lugar das raízes *root locus* o valor de k_v que forneça o máximo amortecimento,
3. Implemente k_v e determine os pólos da função de transferência interna $G^*(s)$. Selecione os pólos complexos conjugados desta f.t., denominando-os p_1 e p_2.

Projeto do filtro notch:

1. Projete o filtro notch cujos os zeros sejam p_1 e p_2, e os pólos especificados no ítem c,
2. Associe $G^*(s)$ ao filtro projetado.

Projeto do controlador P&D:

1. Determine através do lugar das raízes o valor do ganho k_d de forma a se obter o máximo amortecimento para os pólos dominantes da função de transferência da saída $\theta_2(t)$,
2. Implemente o valor de k_d e determine através do lugar das raízes o valor do ganho k_p que tenha o mínimo *tempo de estabelecimento*.
3. Utilize a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com $\theta_2(t)$ como saída, como critério para verificação da adequação do ajuste.

Implementação no software ECP:

O diagrama da Fig. 2 não pode ser implementado diretamente nesta forma. Mostre através de operações algébricas no diagrama de blocos, que o diagrama abaixo é equivalente ao da Fig. 2. Com essa modificação o controlador P&D mais filtro notch serão implementados na malha do *loop 1*.

O bloco correspondente a $k_p G_{\text{notch}}(s)$ é implementado através dos polinômios $t(s)$ (numerador) e $r(s)$ (denominador). O bloco $(k_p + k_d s)G_{\text{notch}}(s)$ é implementado através dos polinômios $s(s)$ (numerador) e $r(s)$ (denominador). Denotando-se respectivamente o numerador e o denominador do filtro *notch* por $n_2 s^2 + n_1 s + n_0$ e $s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0$, temos as seguintes

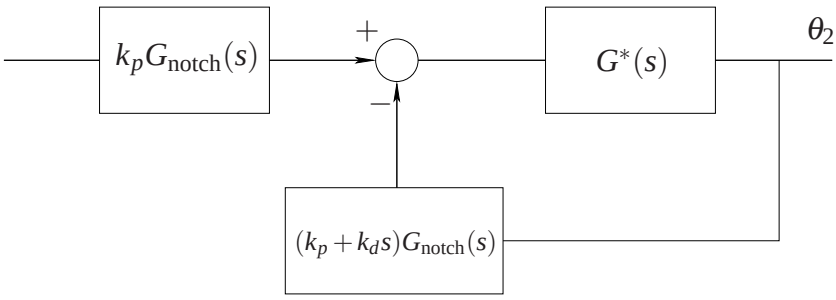

Figura 3: Representação do filtro *notch* + P&D implementado na malha do *loop 1*.

relações entre os coeficientes dos polinômios:

$$
\begin{array}{lll}
t_0 = n_0 k_p & s_0 = n_0 k_p & r_0 = d_0 \\
t_1 = n_1 k_p & s_1 = n_0 k_d + n_1 k_p & r_1 = d_1 \\
t_2 = n_2 k_p & s_2 = n_1 k_d + n_2 k_p & r_2 = d_2 \\
 & s_3 = n_2 k_d & r_3 = d_3 \\
 & & r_4 = 1
\end{array}
$$

1. O programa MATLAB final deve apresentar os coeficientes dos polinômios t, s e r para facilitar a implementação no laboratório.

2. Utilizando os programas MATLAB desenvolvidos, simule o sistema de controle não-co-alocado, de forma a poder fazer comparações com os resultados experimentais a serem obtidos na Experiência 6.

Sugestão:

Para escrever os programas MATLAB, podem ser utilizados os seguintes comandos

Rotinas para construção de funções de transferência: `tf, pzk, feedback, minreal`

Rotinas para obtenção do lugar das raízes e ganhos: `rlocus, sgrid, rlocfind, dcgain`

Rotinas para obtenção de resposta temporal: `step, impulse`

2 Sistema Retilíneo: Controle Co-alocado

O objetivo desta experiência é realizar o controle P&D do sistema retilíneo quando este se apresenta na configuração chamada de *dois graus de liberdade*, que envolve o uso de dois carros conectados por uma mola. Nesta experiência será analisada uma estratégia conhecida como *controle co-alocado*. Por controle co-alocado, entende-se a situação em que o atuador e o sensor estão *co-alocados* no carro que se deseja controlar[1]. Observe que no equipamento existente, o atuador está rigidamente acoplado ao primeiro carro e que cada carro possui um sensor associado. O controle co-alocado é utilizado quando o atuador e o sensor estão acoplados à massa que se deseja controlar, mas com alguma outra massa interferindo no movimento do sistema.

2.1 Sistema com dois graus de liberdade

O sistema com dois graus de liberdade utilizado nesta experiência pode ser modelado a partir da análise da Fig. 4. É possível escrever as seguintes equações diferenciais:

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_2x_1 - k_2x_2 = F(t)$$
$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0$$

Aplicando-se a transformada de Laplace em ambas as equações e resolvendo-as para x_1 e x_2 tem-se:

$$\frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{m_2s^2 + c_2s + k_2}{D(s)} = \frac{N_1(s)}{D(s)}$$

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{k_2}{D(s)} = \frac{N_2(s)}{D(s)}$$

$$D(s) = m_1m_2s^4 + (c_1m_2 + c_2m_1)s^3 + [(m_1 + m_2)k_2 + c_1c_2]s^2 + (c_1 + c_2)k_2s.$$

onde

$X_1(s)$: deslocamento linear do carro #1;
$X_2(s)$: deslocamento linear do carro #2;
$F(s)$: força aplicada ao carro #1;
m_1 e c_1 : massa e coeficiente de atrito viscoso do carro #1;
m_2 e c_2 : massa e coeficiente de atrito viscoso do carro #2;
k_2 : constante da mola conectando os carros #1 e #2.

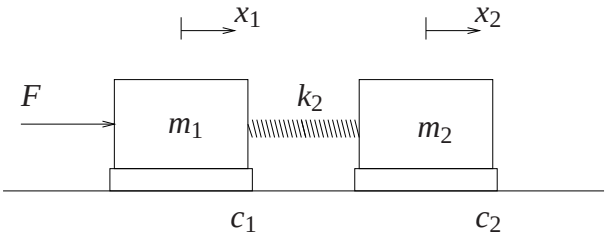

Figura 4: Sistema com dois graus de liberdade.

[1] O termo *co-alocado* é uma tradução livre da expressão em inglês *collocated*.

O que distingue as duas funções de transferência acima é a existência de dois zeros na função $X_1(s)/F(s)$, os quais deverão ser levados em conta caso se deseje adotar uma estratégia de controle co-alocado (controle do carro #1).

2.2 Configuração

A seguinte configuração será adotada nesta experiência:

- Carros #1 e #2 conectados por uma mola de dureza média;
- 4 massas de 500 g sobre os carros #1 e #2;
- Amortecedor desconectado dos carros.

Dados:

$m_{c1} = 0.783$ kg,	$m_{c2} = 0.582$ kg-m^2	(massa dos carros),
$c_{m1} = 3.9$ N/(m/s),	$c_{m2} = 2.36$ N/(m/s)	(coeficientes de atrito dos carros),
$k = 338$ N/m		(constante de mola),
$k_{hw} = 14732$		(ganho de hardware).

2.3 Controle co-alocado

O esquema de controle co-alocado é o representado na figura a seguir:

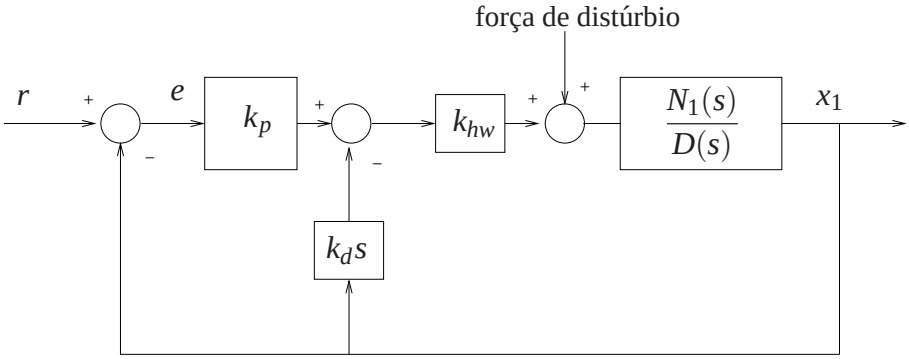

Figura 5: Diagrama para o controle co-alocado.

Observe que o efeito do carro #2 está modelado na função de transferência $N_1(s)/D(s)$ presente no diagrama de blocos. O procedimento para a obtenção do controlador PD é iterativo e parte do controlador obtido na Experiência 3, e que também foi utilizado na Experiência 4.

2.3.1 Procedimento experimental

Nota: Os símbolos ⓖ , ⓣ , ⓓ e ⓢ indicam a necessidade de produção de um gráfico, desenvolvimento teórico, diagrama simulink e script matlab, respectivamente.

1. Ajuste o sistema de acordo com a configuração descrita na Seção 2.2;
2. Implemente o controlador criticamente amortecido utilizado na Experiência 3 (item 3.1.1) certificando-se de que o **Encoder #1** seja selecionado para o controle. Ajuste uma aquisição de dados dos **Encoders 1 e 2** e do sinal de referência (**Comanded Position**) a cada **5 ciclos**. Obtenha a resposta a um degrau de amplitude **2000 counts** e dwell time de **1500**

ms. Exporte e plote (usando o script `plotRawData.m`) os resultados do **Encoder #1** e do sinal de referência e plote o **Encoder #2** no eixo direto (de preferência, use o comando `plotyy`) ⓖ .

3. Ajuste iterativamente os ganhos k_p e k_d até obter uma resposta adequada. Faça os ajustes de ganho gradualmente (nunca maiores que 50% de uma só vez) observando os efeitos de aumentar ou diminuir cada um deles. Não utilize $k_p > 1.2$ e mantenha $0.01 < k_d < 0.05$. Tente atingir o seguinte objetivo para o carro #1: tempo de subida < 200 ms (para 90% do valor de regime) e *overshoot* $\leq 5\%$, sem oscilações excessivas. Exporte e plote a melhor resposta obtida ⓖ . Desloque manualmente o carro #1 e observe a rigidez relativa do sistema de controle atuando sobre o carro;

4. Para a última resposta obtida no passo anterior, exporte e plote a resposta ao degrau do carro #2 ⓖ . Qual é a característica predominante do movimento do carro #2 ⓣ ? É possível explicar as diferenças observadas nas respostas ao degrau dos dois carros a partir das diferenças de suas funções de transferência ⓣ ?

5. Mude iterativamente k_p e k_d utilizando os valores existentes como ponto de partida, observando a resposta ao degrau da variável x_2 de modo que esta variável apresente máximo *overshoot* $\leq 10\%$, sem oscilações excessivas e o menor tempo de subida possível. Exporte e plote as respostas finais ⓖ e forneça os ganhos correspondentes ⓣ . Desloque manualmente os carros #1 e #2 e observe a rigidez relativa de cada um dos carros. De maneira geral, a rigidez observada aumentou ou diminuiu em relação ao observado no item 3 ⓣ ? Compare o erro em regime da variável x_1 obtido neste item com o obtido no item 3 ⓣ ;

6. A partir da Fig. 5, calcule a função de transferência entre a variável x_1 e a força de distúrbio F_d ⓣ . O inverso do ganho estático (ganho da função em $s = 0$) da função obtida é chamado de *servo-rigidez estática* e é uma medida da rigidez observada no item anterior. Calcule a servo-rigidez estática dos controladores obtidos nos itens 3 e 5 e compare-os com os observados ⓣ ;

7. Repita o item anterior para a variável x_2, respondendo as mesmas perguntas.

2.3.2 Exercícios sugeridos

1. Verifique no Matlab o ajuste encontrado, através da rotina `rlocus` de lugar das raízes. Faça outras determinações dos ganhos k_p e k_d que exibam bons ajustes de malha fechada;

2. Faça o mesmo procedimento "experimental" através de simulação utilizando agora o controlador PD.

2.4 Pré-relatório da Experiência 6

O *controle não-co-alocado* será objeto de estudos na Experiência 6 e baseia-se na existência de uma malha interna de controle de velocidade do deslocamento x_1, responsável pelo ajuste do amortecimento. O deslocamento x_1 é a variável que exerce a ação sobre a variável de saída x_2, por intermédio da mola. De fato, é possível reescrever a função de transferência entre $X_2(s)/F(s)$ na forma

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = k_{hw}\frac{N_1(s)}{D(s)} \cdot \frac{N_2(s)}{N_1(s)},$$

onde

$$N_1(s) = m_2 s^2 + c_2 s + k, \quad N_2(s) = k$$
$$D(s) = m_1 m_2 s^4 + (c_1 m_2 + c_2 m_1) s^3 + [(m_1 + m_2)k + c_1 c_2] s^2 + (c_1 + c_2) k s.$$

e as massas m_1 e m_2 tem o mesmos valores da Experiência 5. Note que $F(s)$ tem sentido de força aplicada, mas está expressa em unidades apropriadas ao uso no ECP, em vista da constante k_{hw}.

2.4.1 Linhas gerais do projeto

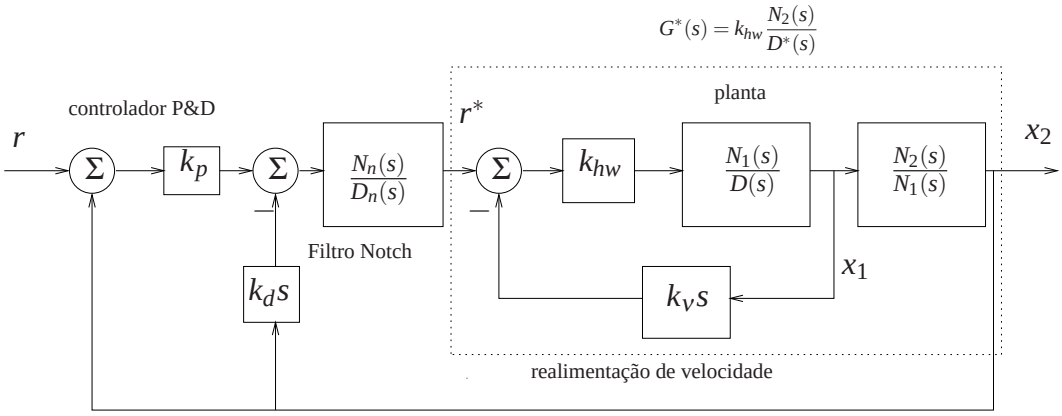

Figura 6: Diagrama para o controle não-co-alocado.

Adotaremos o esquema de controle representado na Fig. 6 e a determinação dos controladores será feito da seguinte maneira:

a. Calcula-se inicialmente o ganho k_v, utilizando-se o lugar das raízes (*root locus*) da malha interna, de modo que o amortecimento dos pólos em malha fechada de $X_1(s)/R^*(s)$ seja o maior possível;

b. Obtém-se a função de transferência $G^*(s)$, representada pela linha pontilhada na Fig. 6;

c. Calculam-se os parâmetros do filtro *notch* $N_n(s)/D_n(s)$ de modo que:

   1. os dois zeros do filtro cancelem dois pólos de $G^*(s)$ (tipicamente pólos pouco amortecidos), isto é, raízes de $D^*(s)$ complexas conjugadas.

   2. o filtro possua dois pares de pólos complexos conjugados de freqüência natural $f_{n1} =$ 5Hz e $f_{n2} = 8$Hz respectivamente, e $\xi = \sqrt{2}/2$ para ambos os pares.

   3. o coeficiente do termo de maior grau do polinômio $D_n(s)$ deve ser 1 (polinômio *mônico*) e o ganho estático (DC) da função de transferência do filtro deve ser unitário;

d. Os parâmetros do controlador P&D devem ser obtidos com o auxílio do diagrama do lugar das raízes *root locus*, adotando-se o critério de máximo amortecimento para os pólos dominantes em malha fechada.

e. A implementação do filtro *notch* e controlador P&D será realizada utilizando a forma geral **General Form** do software do ECP, com a utilização dos polinômios $t(s)$, $s(s)$ e $r(s)$.

2.4.2 Detalhamento

Considere os passos a seguir para a realização do projeto do controle não-co-alocado. Adote os mesmos valores numéricos utilizados na Experiência 5.

Projeto da realimentação do carro 1:

Escreva um programa Matlab para executar os seguintes passos:

1. Implemente as funções de transferências da planta utilizando os valores numéricos para definir $X_1(s)/R^*(s)$,
2. Determine através do lugar das raízes *root locus* o valor de k_v que forneça o máximo amortecimento,
3. Implemente k_v e determine os pólos da função de transferência interna $G^*(s)$. Selecione os pólos complexos conjugados desta f.t., denominando-os p_1 e p_2.

Projeto do filtro notch:

1. Projete o filtro notch cujos os zeros sejam p_1 e p_2, e os pólos especificados no ítem c,
2. Associe $G^*(s)$ ao filtro projetado.

Projeto do controlador P&D:

1. Determine através do lugar das raízes o valor do ganho k_d de forma a se obter o máximo amortecimento para os pólos dominantes da função de transferência da saída $x_2(t)$,
2. Implemente o valor de k_d e determine através do lugar das raízes o valor do ganho k_p que tenha o mínimo *tempo de estabelecimento*.
3. Utilize a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com $x_2(t)$ como saída, como critério para verificação da adequação do ajuste.

Implementação no software ECP:

O diagrama da Fig. 6 não pode ser implementado diretamente nesta forma. Mostre através de operações algébricas no diagrama de blocos, que o diagrama abaixo é equivalente ao da Fig. 6. Com essa modificação o controlador P&D mais filtro notch serão implementados na malha do *loop 1*.

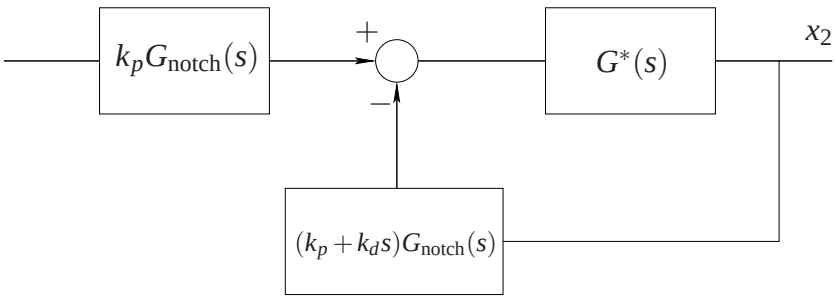

Figura 7: Representação do filtro *notch* + P&D implementado na malha do *loop 1*.

O bloco correspondente a $k_p G_{\text{notch}}(s)$ é implementado através dos polinômios $t(s)$ (numerador) e $r(s)$ (denominador). O bloco $(k_p + k_d s)G_{\text{notch}}(s)$ é implementado através dos polinômios $s(s)$ (numerador) e $r(s)$ (denominador). Denotando-se respectivamente o numerador e o denominador do filtro *notch* por $n_2 s^2 + n_1 s + n_0$ e $s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0$, temos as seguintes relações entre os coeficientes dos polinômios:

$$
\begin{array}{lll}
t_0 = n_0 k_p & s_0 = n_0 k_p & r_0 = d_0 \\
t_1 = n_1 k_p & s_1 = n_0 k_d + n_1 k_p & r_1 = d_1 \\
t_2 = n_2 k_p & s_2 = n_1 k_d + n_2 k_p & r_2 = d_2 \\
 & s_3 = n_2 k_d & r_3 = d_3 \\
 & & r_4 = 1
\end{array}
$$

1. O programa MATLAB final deve apresentar os coeficientes dos polinômios t, s e r para facilitar a implementação no laboratório.

2. Utilizando os programas MATLAB desenvolvidos, simule o sistema de controle não-coalocado, de forma a poder fazer comparações com os resultados experimentais a serem obtidos na Experiência 6.

Sugestão:

Para escrever os programas MATLAB, podem ser utilizados os seguintes comandos

Rotinas para construção de funções de transferência: `tf, zpk, feedback, minreal`

Rotinas para obtenção do lugar das raízes e ganhos: `rlocus, sgrid, rlocfind, dcgain`

Rotinas para obtenção de resposta temporal: `step, impulse`

3 Sistema Torcional: Controle Co-alocado

O objetivo desta experiência é realizar o controle P&D do sistema torcional quando este se apresenta na configuração chamada de *dois graus de liberdade*, que envolve dois discos de inércia. Nesta experiência será analisada uma estratégia conhecida como *controle co-alocado*. Por controle co-alocado, entende-se a situação em que o atuador e o sensor estão *co-alocados* no mesmo disco[2]. Observe que no equipamento existente, o atuador está rigidamente acoplado ao disco inferior e que cada disco possui um sensor associado. O controle co-alocado é utilizado quando o atuador e o sensor estão acoplados à inércia que se deseja controlar, mas com alguma outra inércia interferindo no movimento do sistema. Um exemplo prático não-industrial de controle co-alocado é o controle da atitude de um satélite (Franklin et al., 1988).

3.1 Sistema com dois graus de liberdade

O sistema com dois graus de liberdade utilizado nesta experiência pode ser modelado a partir da análise da Fig. 8. É possível escrever as seguintes equações diferenciais:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + c_1\dot{\theta}_1 + k_{\text{eq}}(\theta_1 - \theta_2) = T(t)$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 + c_2\dot{\theta}_2 - k_{\text{eq}}(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

Aplicando-se a transformada de Laplace em ambas as equações e resolvendo-as para θ_1 e θ_2 tem-se:

$$\frac{\Theta_1(s)}{T(s)} = \frac{J_2s^2 + c_2s + k_{\text{eq}}}{D(s)} = \frac{N_1(s)}{D(s)}$$

$$\frac{\Theta_2(s)}{T(s)} = \frac{k_{\text{eq}}}{D(s)} = \frac{N_2(s)}{D(s)}$$

$$D(s) = J_1J_2s^4 + (c_1J_2 + c_2J_1)s^3 + [(J_1 + J_2)k_{\text{eq}} + c_1c_2]s^2 + (c_1 + c_2)k_{\text{eq}}s$$

onde

$\Theta_1(s)$: deslocamento angular do disco inferior;
$\Theta_2(s)$: deslocamento angular do disco superior;
$T(s)$: o torque aplicado ao disco inferior;
J_1 e c_1 : momento de inércia e o coeficiente de atrito viscoso do disco inferior;
J_2 e c_2 : momento de inércia e o coeficiente de atrito viscoso do disco superior;
k_{eq} : constante elástica torcional produzida pela associação das molas.

O que distingue as duas funções de transferência acima é a existência de dois zeros na função $\Theta_1(s)/T(s)$, os quais deverão ser levados em conta caso se deseje adotar uma estratégia de controle co-alocado (controle do disco inferior).

3.2 Configuração

A seguinte configuração será adotada nesta experiência:

- Disco inferior conectado ao disco superior; disco intermediário removido;

[2] O termo *co-alocado* é uma tradução livre da expressão em inglês *collocated*.

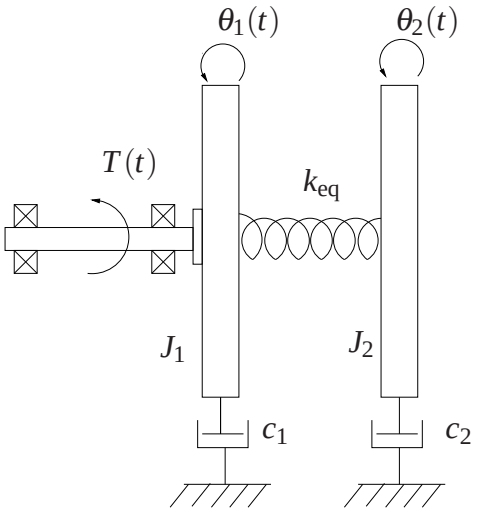

Figura 8: Diagrama para o sistema.

- Duas massas de 500g em cada um dos discos, fixadas simetricamente a 9 cm dos centros dos discos.

Dados:

$J_{d1} = 2.38\times10^{-3}$ kg-m^2	$J_{d2} = 1.84\times10^{-3}$ kg-m^2
$J_1 = J_{d1} + J_w$	$J_2 = J_{d2} + J_w$
$J_w = 2\cdot(md^2 + mr^2/2)$	
$k_{\text{eq}} = 1.37$ N-rad	$k_{hw} = 17.58$ N-m/rad
$c_1 = 7.64\times10^{-3}$ N-m/rad	$c_2 = 1.33\times10^{-3}$ N-m/rad

3.3 Controle co-alocado

O esquema de controle co-alocado é o representado na figura a seguir.

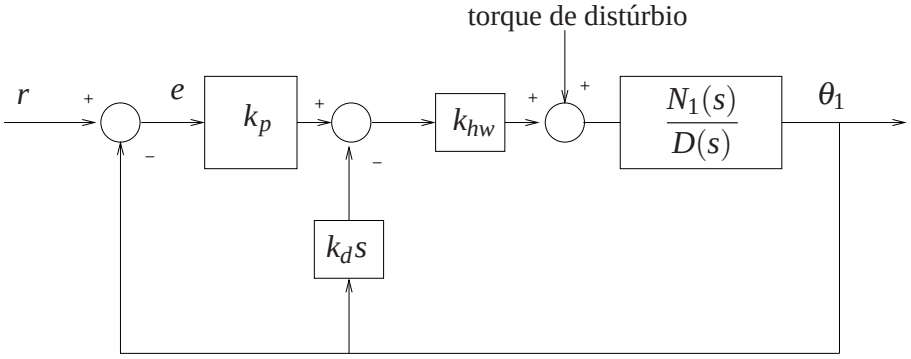

Figura 9: Diagrama para o controle co-alocado.

Observe que o efeito do disco de inércia superior está modelado na função de transferência $N_1(s)/D(s)$ presente no diagrama de blocos. O procedimento para a obtenção do controlador PD é iterativo e parte do controlador obtido na Experiência 3, e que também foi utilizado na Experiência 4.

3.3.1 Procedimento experimental

Nota: Os símbolos ⓖ , ⓣ , ⓓ e ⓢ indicam a necessidade de produção de um gráfico, desenvolvimento teórico, diagrama simulink e script matlab, respectivamente.

1. Ajuste o sistema de acordo com a configuração descrita na Seção 3.2;

2. Implemente o controlador criticamente amortecido utilizado na Experiência 4 (item 4.1.1) certificando-se de que o **Encoder #1** seja selecionado para o controle. Ajuste uma aquisição de dados dos **Encoders #1 e #3** e do sinal de referência (**Comanded Position**) a cada **5 ciclos**. Obtenha a resposta a um degrau de amplitude **1000 counts** e dwell time de **1500 ms**. Exporte e plote (usando o script `plotRawData.m`) os resultados do **Encoder #1** e do sinal de referência, e plote o **Encoder #3 no eixo direito** ⓖ ; De preferência, use o comando `plotyy`.

3. Ajuste iterativamente os ganhos k_p e k_d até obter uma resposta adequada. Faça os ajustes de ganho gradualmente (nunca maiores que 50% de uma só vez) observando os efeitos de aumentar ou diminuir cada um deles. Não utilize $k_p > 1$ e mantenha $0.02 < k_d < 0.2$. Tente atingir o seguinte objetivo: tempo de subida < 400 ms (para 90% do valor de regime) e *overshoot* $< 10\%$, sem oscilações excessivas. Exporte e plote a melhor resposta obtida ⓖ . Desloque manualmente o disco inferior e depois o disco superior observando a rigidez relativa de cada um dos discos. Note que a rigidez do disco inferior é completamente devida ao sistema de controle;

4. Para a última resposta obtida no passo anterior, exporte e plote as respostas ao degrau dos dois discos, de preferência na mesma figura ⓖ . Qual é a característica predominante do movimento do disco superior ⓣ ? É possível explicar as diferenças observadas nas respostas ao degrau dos dois discos a partir das diferenças de suas funções de transferência ⓣ ?

5. Mude iterativamente k_p e k_d utilizando os valores obtidos como ponto de partida, observando a resposta ao degrau da variável θ_2 de modo a que esta variável apresente máximo *overshoot* $< 10\%$, sem oscilações excessivas e o menor tempo de resposta possível. Exporte e plote as respostas finais ⓖ e forneça os ganhos correspondentes ⓣ . Desloque manualmente os discos inferior e superior e observando a rigidez relativa de cada um dos discos. De maneira geral, a rigidez observada aumentou ou diminuiu em relação ao observado no item 3 ⓣ ? Compare o erro em regime da variável θ_1 obtido neste item com o obtido pelo controlador de alto ganho no item 3 ⓣ .

6. A partir da Fig. 9, calcule a função de transferência entre a variável θ_1 e o torque de distúrbio T_d ⓣ . O inverso do ganho estático da função (ganho da função em $s = 0$) obtida é chamado de *servo- rigidez estática* e é uma medida da rigidez observada no item anterior. Calcule a servo-rigidez estática dos controladores obtidos nos itens 3 e 5 e compare-os com os observados ⓣ .

7. Repita o item anterior para a variável θ_2, respondendo as mesmas perguntas.

3.3.2 Exercícios sugeridos

1. Verifique no Matlab o ajuste encontrado, através da rotina `rlocus` de lugar das raízes. Faça outras determinações dos ganhos k_p e k_d que exibam bons ajustes de malha fechada;

2. Faça o mesmo procedimento “experimental”através de simulação utilizando agora o controlador PD.

3.4 Pré-relatório da Experiência 6

O *controle não-co-alocado* será objeto de estudos na Experiência 6 e baseia-se na existência de uma malha interna de controle de velocidade do deslocamento angular θ_1, responsável pelo ajuste do amortecimento. O deslocamento θ_1 é a variável que exerce a ação sobre a variável de saída θ_2 do terceiro disco, por intermédio da mola de torção. De fato, é possível reescrever a função de transferência entre $\Theta_2(s)/T(s)$ na forma

$$\frac{\Theta_2(s)}{T(s)} = k_{hw}\frac{N_1(s)}{D(s)}\cdot\frac{N_2(s)}{N_1(s)},$$

onde

$$N_1(s) = J_2s^2 + c_2s + k_{\text{eq}}, \quad N_2(s) = k_{\text{eq}}$$
$$D(s) = J_1J_2s^4 + (c_1J_2 + c_2J_1)s^3 + [(J_1+J_2)k_{\text{eq}} + c_1c_2]s^2 + (c_1+c_2)k_{\text{eq}}s.$$

e $1/k_{\text{eq}} = 1/k_1 + 1/k_2$, e as inércias J_1 e J_2 tem os mesmos valores da Experiência 5. Note que $T(s)$ tem sentido de torque aplicado, mas está expresso em unidades apropriadas ao uso no ECP, em vista da constante k_{hw}.

3.4.1 Linhas gerais do projeto

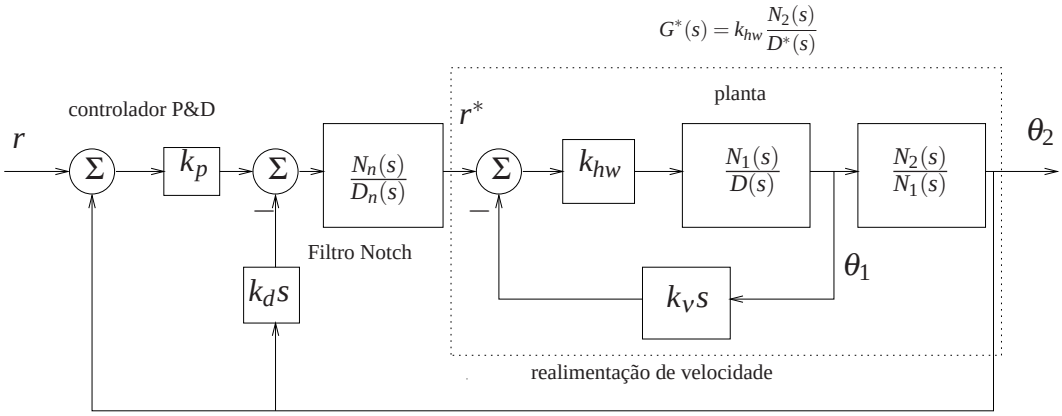

Figura 10: Diagrama para o controle não-co-alocado.

Adotaremos o esquema de controle representado na Fig. 10 e a determinação dos controladores será feito da seguinte maneira:

a. Calcula-se inicialmente o ganho k_v, utilizando-se o lugar das raízes (*root locus*) da malha interna, de modo que o amortecimento dos pólos em malha fechada de $\theta_1(s)/R^*(s)$ seja o maior possível;

b. Obtém-se a função de transferência $G^*(s)$, representada pela linha pontilhada na Fig. 10;

c. Calculam-se os parâmetros do filtro *notch* $N_n(s)/D_n(s)$ de modo que:

   1. os dois zeros do filtro cancelem dois pólos de $G^*(s)$ (tipicamente pólos pouco amortecidos), isto é, raízes de $D^*(s)$ complexas conjugadas.

   2. o filtro possua dois pares de pólos complexos conjugados de freqüência natural $f_{n1} =$ 5Hz e $f_{n2} = 11$Hz respectivamente, e $\xi = \sqrt{2}/2$ para ambos os pares.

   3. o coeficiente do termo de maior grau do polinômio $D_n(s)$ deve ser 1 (polinômio *mônico*) e o ganho estático (DC) da função de transferência do filtro deve ser unitário;

d. Os parâmetros do controlador P&D devem ser obtidos com o auxílio do diagrama do lugar das raízes *root locus*, adotando-se o critério de máximo amortecimento para os pólos dominantes em malha fechada.

e. A implementação do filtro *notch* e controlador P&D será realizada utilizando a forma geral **General Form** do software do ECP, com a utilização dos polinômios $t(s)$, $s(s)$ e $r(s)$.

3.4.2 Detalhamento

Considere os passos a seguir para a realização do projeto do controle não-co-alocado. Adote os mesmos valores numéricos utilizados na Experiência 5.

Projeto da realimentação do disco 1:

Escreva um programa Matlab para executar os seguintes passos:

1. Implemente as funções de transferências da planta utilizando os valores numéricos para definir $\theta_1(s)/R^*(s)$,

2. Determine através do lugar das raízes *root locus* o valor de k_v que forneça o máximo amortecimento,

3. Implemente k_v e determine os pólos da função de transferência interna $G^*(s)$. Selecione os pólos complexos conjugados desta f.t., denominando-os p_1 e p_2.

Projeto do filtro notch:

1. Projete o filtro notch cujos os zeros sejam p_1 e p_2, e os pólos especificados no ítem c,

2. Associe $G^*(s)$ ao filtro projetado.

Projeto do controlador P&D:

1. Determine através do lugar das raízes o valor do ganho k_d de forma a se obter o máximo amortecimento para os pólos dominantes da função de transferência da saída $\theta_2(t)$,

2. Implemente o valor de k_d e determine através do lugar das raízes o valor do ganho k_p que tenha o mínimo *tempo de estabelecimento*.

3. Utilize a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com $\theta_2(t)$ como saída, como critério para verificação da adequação do ajuste.

Implementação no software ECP:

O diagrama da Fig. 10 não pode ser implementado diretamente nesta forma. Mostre através de operações algébricas no diagrama de blocos, que o diagrama abaixo é equivalente ao da Fig. 10. Com essa modificação o controlador P&D mais filtro notch serão implementados na malha do *loop 1*.

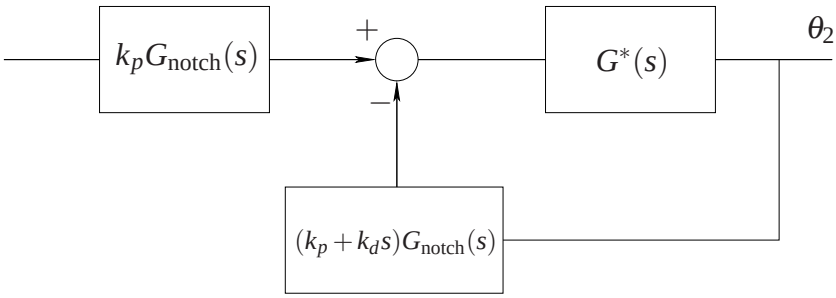

Figura 11: Representação do filtro *notch* + P&D implementado na malha do *loop 1*.

O bloco correspondente a $k_p G_{\text{notch}}(s)$ é implementado através dos polinômios $t(s)$ (numerador) e $r(s)$ (denominador). O bloco $(k_p + k_d s) G_{\text{notch}}(s)$ é implementado através dos polinômios $s(s)$ (numerador) e $r(s)$ (denominador). Denotando-se respectivamente o numerador e o denominador do filtro *notch* por $n_2 s^2 + n_1 s + n_0$ e $s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0$, temos as seguintes relações entre os coeficientes dos polinômios:

$$
\begin{array}{lll}
t_0 = n_0 k_p & s_0 = n_0 k_p & r_0 = d_0 \\
t_1 = n_1 k_p & s_1 = n_0 k_d + n_1 k_p & r_1 = d_1 \\
t_2 = n_2 k_p & s_2 = n_1 k_d + n_2 k_p & r_2 = d_2 \\
 & s_3 = n_2 k_d & r_3 = d_3 \\
 & & r_4 = 1
\end{array}
$$

1. O programa MATLAB final deve apresentar os coeficientes dos polinômios t, s e r para facilitar a implementação no laboratório.

2. Utilizando os programas MATLAB desenvolvidos, simule o sistema de controle não-colocado, de forma a poder fazer comparações com os resultados experimentais a serem obtidos na Experiência 6.

Sugestão:

Para escrever os programas MATLAB, podem ser utilizados os seguintes comandos

Rotinas para construção de funções de transferência: `tf, pzk, feedback, minreal`

Rotinas para obtenção do lugar das raízes e ganhos: `rlocus, sgrid, rlocfind, dcgain`

Rotinas para obtenção de resposta temporal: `step, impulse`

4 Controle em cascata do pêndulo invertido

O objetivo desta experiência é desenvolver um sistema de controle em malha fechada para o pêndulo invertido através da realimentação em cascata da posição linear da haste e da posição angular do pêndulo. O controle da posição linear da haste através de um controlador **PD** foi objeto da Experiência 3 e corresponde ao controle da malha interna. Esta experiência lida especificamente com o controle da malha externa - posição angular do pêndulo - que será realizado através de uma estratégia simples de alocação de pólos.

O controle em cascata do pêndulo invertido torna-se atraente do ponto de vista de projeto devido a possibilidade de se obter um modelo simplificado, de 2a. ordem, para a função de transferência $X(s)/F(s)$. O controle pode ser então realizado por duas malhas sucessivas.

Malha interna - Fecha-se uma malha de controle interna, que resolve o problema de gerar a posição linear x que produzirá um ângulo de referência especificado, θ. A malha interna deve responder rapidamente e sem oscilações, para que eventuais transitórios não sejam percebidos pela malha externa;

Malha externa - A posição linear produzida pela malha interna é transformada em posição angular, dado que se conhece a função de transferência $\Theta(s)/X(s)$, também de 2a. ordem. A malha externa pode então ser fechada por um controlador que forneça um comportamento apropriado para a posição angular.

Observe que abordagens *diretas* para o projeto de sistemas de controle do pêndulo invertido teriam que lidar com a função de transferência instável de 4a. ordem $X(s)/F(s)$, o que levaria a um projeto muito mais elaborado de alocação de pólos do que o viabilizado pela estratégia de simplificação de modelo/controle em cascata adotada nesta experiência.

4.1 Controle PD do pêndulo invertido

A malha interna do sistema controla a posição linear da haste deslizante através de um controlador **PD**. O projeto dos controladores baseia-se no modelo simplificado do sistema já utilizado nas Experiência 3 e 4, vide a Fig. 12.

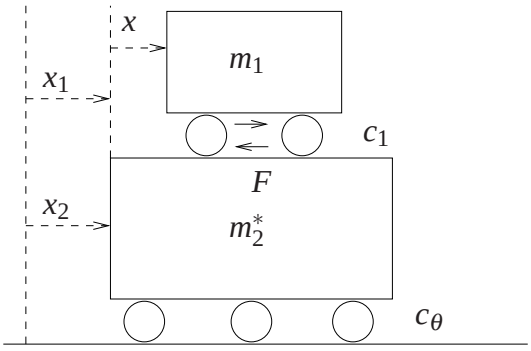

Figura 12: Modelo simplificado do sistema.

Para pequenos deslocamentos em torno da posição de equilíbrio, o conjunto pêndulo-haste pode ser visto como um sistema composto por duas massas deslizantes com transmissão de força entre elas. Na Fig. 12, m_1 representa a massa equivalente da haste, m_2^* a massa equivalente do

pêndulo e contra-peso, x_2 a posição *linear* do pêndulo e x a posição da haste relativa ao pêndulo, que é objeto do projeto inicial de controle. Considerando o atrito viscoso com coeficiente c_1 e assumindo que $c_\theta \approx 0$, temos que

$$m_1\ddot{x}_1 = F - c_1\dot{x}$$
$$m_2^*\ddot{x}_2 = -F + c_1\dot{x},$$

onde x_1 é a posição da haste relativa ao referencial do pêndulo. Logo $x_1 = x_2 + x$ e portanto

$$m_1(\ddot{x}_2 + \ddot{x}) = F - c_1\dot{x}.$$

Usando a segunda expressão, obtém-se

$$m^*\ddot{x} + c_1\dot{x} = F, \quad m^* = \frac{m_1 m_2^*}{m_1 + m_2^*}.$$

A massa m_2^* pode ser obtida a partir do momento de inércia do conjunto sem a haste através de

$$m_2^*\ell_o^2 = \bar{J}.$$

onde ℓ_o é o comprimento da haste e $\bar{J}$ é o momento de inércia do pêndulo sem a haste. O sistema de controle em malha fechada do sistema simplificado pode ser representado como na Fig. 13, onde agora e^* é um sinal de referência gerado pela malha externa. A função de transferência de malha fechada é

$$\frac{X(s)}{E^*(s)} = \frac{(k_{hw}/m^*)(k_p + k_d s)}{s^2 + (k_{hw}/m^*)(k_p + k_d s)}, \tag{1}$$

expressando-se $X(s)$ em unidades de Counts devido a presença do ganho $k_{hw} = k_s k_f k_x$. Definindo-se

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k_p k_{hw}}{m^*}} \tag{2}$$
$$\xi := \frac{c_1 + k_d k_{hw}}{2m^*\omega_n} = \frac{c_1 + k_d k_{hw}}{2\sqrt{m^* k_p k_{hw}}} \tag{3}$$

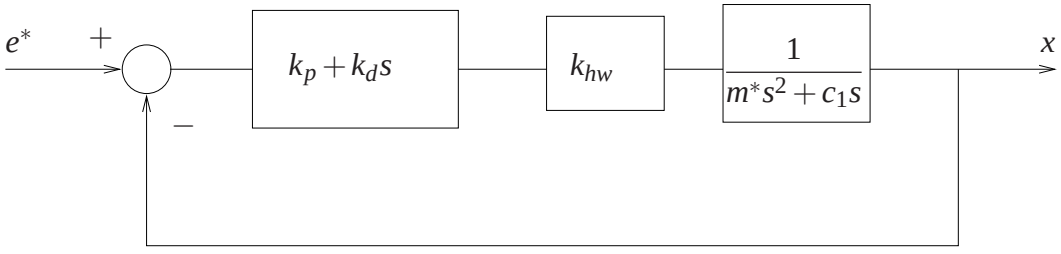

Figura 13: Controle **PD** da haste.

a função de transferência em malha fechada pode ser colocada na forma padrão

$$\frac{X(s)}{E^*(s)} = \frac{2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}.$$

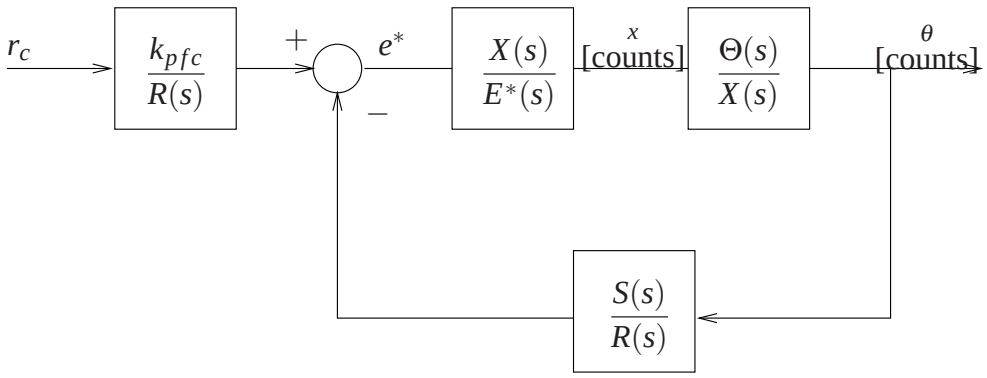

Figura 14: Controle da malha externa do pêndulo.

4.2 Controle do ângulo Θ por alocação de pólos

Considere o sistema de controle da malha externa do pêndulo em unidades de counts, como ilustrado na Fig. 14 abaixo.

Na Fig. 14, as quantidades θ, x e r_c (referência) estão representadas em counts: $\theta = k_a\theta_{\rm rd}$, onde $k_a = 2546$ counts/radianos é o fator de escala da posição angular do pêndulo; $x = k_x x_{\rm m}$, onde $k_x = 50200$ counts/metros é o fator de escala da posição linear da haste.

Ainda com relação à Fig. 14, k_{pfc} é o ganho do pré-filtro em counts e os polinômios $S(s)$ e $R(s)$ (não confundir com a transformada de Laplace do sinal de referência) devem ser determinados para posicionar os pólos do sistema em malha fechada nas localizações especificadas. Observe que a função de transferência $X(s)/E^*(s)$ é dada por (1).

As especificações adotadas para o projeto do controlador **PD** para a malha do deslocamento da haste deslizante, fazem com que a posição linear siga rapidamente a posição comandada, de tal forma que para todos os efeitos, a função de transferência $X(s)/E^*(s)$ se comporta aproximadamente como um ganho unitário.

Nessa situação podemos considerar que a malha externa envolve agora o controle da planta simplificada:

$$\frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{k_a m_1 \ell_o}{k_x J^*} \frac{-s^2 + g/\ell_o}{s^2 + [c_r - (m_1\ell_o + m_2\ell_c)g]/J^*} := k^* \frac{N_{ax}(s)}{D_{ax}(s)}. \tag{4}$$

com os seguintes valores:

$m_1 = 0,238$ kg	massa da haste deslizante com os pesos circulares,
$m_{2o} = 0,785$ kg	massa da haste principal,
$m_{w2} = 1,0$ kg	massa do contrapeso,
$m_2 = m_{2o} + m_{w2}$	(kg)
$\ell_o = 0,330$ m	distância† do centro de massa da haste deslizante,
$\ell_{co} = 0,071$ m	distância† do centro de massa da haste principal,
$\ell_{w2} = -0,1385$m	distância† do centro de massa do contrapeso $\ell_t = 10$cm (estável),
$= $ ou $-0,1085$m	distância† do centro de massa do contrapeso $\ell_t = 7$cm (instável),
$\ell_c = (m_{w2}\ell_{w2} + m_{2o}\ell_{co})/m_2$	(m)
$J_0^* = 0,0246$ kg-m^2	momento de inércia do pêndulo (s/ haste deslizante e contrapeso),
$J^* = J_0^* + m_1\ell_o^2 + m_{w2}\ell_{w2}^2$	momento de inércia total,
$c_r = 0,0144$	(Nms/rd) coeficiente de atrito da haste principal
$k_a = 2546$ counts/rd	ganho do encoder 1,
$k_x = 50200$ counts/m	ganho do encoder 2.

† distâncias orientadas a partir do pivô do pêndulo.

Exercício 1: Considere as equações linearizadas para o pêndulo a seguir (vide manual da experiência 5 de EA-619, eq. (4), ou o manual do equipamento):

$$\begin{cases} \bar{J}\ddot{x}_{\mathrm{m}} + m_1\ell_o g x_{\mathrm{m}} + (m_2\ell_o\ell_c - \bar{J})g\theta_{\mathrm{rd}} = \dfrac{J^*}{m_1}F(t) \\ \bar{J}\ddot{\theta}_{\mathrm{rd}} - m_1 g x_{\mathrm{m}} - m_2\ell_c g\theta_{\mathrm{rd}} = -\ell_o F(t) \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{m}} &- \text{ deslocamento da haste em metros,} \\ \theta_{\mathrm{rd}} &- \text{ deslocamento angular em radianos, e} \\ \bar{J} &= J^* - m_1\ell_o^2. \end{aligned}$$

Mostre que $\dfrac{\Theta(s)}{X(s)}$ é dado pela função de transferência em (4)ⓣ .

Como especificação de projeto, deseja-se que a equação característica do sistema em malha fechada da Fig. 14 deva ser igual a um certo polinômio $D_{cl}(s)$, cujas raízes são os pólos desejados para o sistema de malha fechada.

Exercício 2: Mostre que a equação característica do sistema em malha fechada da Fig. 14 é igual a

$$D_{ax}(s)R(s) + k^*N_{ax}(s)S(s) = D_{cl}(s).\text{ⓣ} \tag{5}$$

Equações polinomiais da forma acima são conhecidas como *Equações Diofantinas*. Pode-se mostrar que como os polinômios $D_{ax}(s)$ e $k^*N_{ax}(s)$ são *coprimos*, isto é, não possuem raízes comuns, sempre é possível encontrar polinômios $S(s)$ e $R(s)$ de ordem 1 que resolvem a equação polinomial (5), qualquer que seja $D_{cl}(s)$, e portanto quaisquer que sejam as localizações arbitradas para os pólos de malha fechada do sistema.

Obviamente, a equação polinomial (5) pode ser resolvida definindo-se $S(s) = s_0 + s_1 s$ e $R(s) = r_0 + r_1 s$, desenvolvendo os produtos de polinômios e igualando os coeficientes de mesma potência. Entretanto, este procedimento pode torna-se trabalhoso mesmo para polinômios de ordens relativamente baixas. Por outro lado, sabe-se que equações Diofantinas podem ser representadas como sistemas de equações lineares através da chamada *matriz de Sylvester*. No caso específico em questão, o sistema de equações assume a forma

$$\begin{bmatrix} d_0 & n_0 & 0 & 0 \\ d_1 & n_1 & d_0 & n_0 \\ d_2 & n_2 & d_1 & n_1 \\ 0 & 0 & d_2 & n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \\ r_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

onde d_i e n_i, $i = 0,1,2$ são os coeficientes dos polinômios $D_{ax}(s)$ e $k^*N_{ax}(s)$ e f_i, $i = 0,1,2,3$ são os coeficientes do polinômio $D_{cl}(s)$, em ordem crescente de potências de s.

A solução da equação de Silvester (6) fornece $S(s) = s_0 + s_1 s$ e $R(s) = r_0 + r_1 s$ que aloca os pólos nas localizações definidas por $D_{cl}(s)$, mas não é capaz de fazer com que, em regime,

a posição angular do pêndulo θ siga a referência r_c, uma vez que não existe nenhum integrador no caminho direto. Esta especificação será atingida através do ganho do pré-filtro, k_{pfc}.

A função de transferência de malha fechada entre $\Theta(s)$ e $R_c(s)$ é dada por

$$H_c(s) = \frac{\Theta(s)}{R_c(s)} = \frac{k_{pfc}}{R(s)} \frac{G_p(s)}{[1 + G_c(s)G_p(s)]},$$

onde $G_p(s) = \Theta(s)/X(s)$ e $G_c(s) = S(s)/R(s)$.

Exercício 3: Se em regime a saída deve seguir a entrada, então o ganho DC de $H_c(s)$ deve ser unitário. Impondo $H_c(0) = 1$ na expressão acima, mostre que o ganho de pré-filtro será

$$k_{pfc} = s_0 - \frac{k_x r_0}{k_a m_1}(m_1 \ell_o + m_2 \ell_c). \text{ⓣ} \tag{7}$$

□

O cálculo de k_{pfc} completa o projeto de controle da malha externa do pêndulo invertido por alocação de pólos.

4.3 Atenuação de ruídos

Em certos casos, o pêndulo pode apresentar pequenas oscilações na posição linear da haste em torno do ponto de equilíbrio. O problema é causado pelo efeito conhecido como *jitter* (ruído numérico), produzido por erros de quantização, e normalmente amplificado pela diferenciação numérica introduzida pelo controlador PD. Este problema pode ser facilmente resolvido através de um filtro passa-baixas, com frequência de corte significativamente maior que a largura de banda do sistema em malha fechada para não comprometer a resposta dinâmica desejada, e baixa o suficiente para atenuar efetivamente o ruído. A função de transferência do filtro é

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1},$$

onde τ (s) é a constante de tempo do filtro e $1/\tau$ (rd/s) é a sua frequência de corte (largura de banda). Sugere-se $\tau = 0.008$ s. **Exercício 4**: Justifique esta escolha, comparando a frequência de corte $1/\tau$ com as frequência relativas aos pólos do sistema em malha fechada ⓣ .

4.4 Configurações do pêndulo invertido

A experiência utiliza as configurações estável e instável do pêndulo: utiliza-se os 'donuts' da haste, o contra-peso do pêndulo e a distância do contra-peso ao pivot é de $\ell_t = 10$ cm e $\ell_t = 7$ cm para as plantas estável e instável, respectivamente (o que corresponde a distância do centro de massa ao pivô de $\ell_{w2} = -0.1385$ m e $\ell_{w2} = -0.1085$, respectivamente). A partir das constantes envolvidas apresentadas na seção anterior, determina-se o modelo simplificado do movimento da haste deslizante, envolvendo os valores de k_{hw} e de m^* relativos a cada configuração. Em seguida utiliza-se o modelo dado na equação (4) e malha fechada como na Fig. 14, considerando $X(s)/E^*(s) \approx 1$.

Dados adicionais do modelo:

$k_f = 0.0013$ N/DACcounts	ganho combinado: conversor DA/amplificador/motor/roldana,
$k_s = 32$ DACcounts/Counts	conversão de pulsos de encoder para unidade da placa DSP,
$k_{hw} = k_x k_f k_s$	ganho de hardware para o deslocamento da haste ($X(s)$).

4.5 Procedimento experimental

Nota: Os símbolos ⓖ , ⓣ , ⓓ e ⓢ indicam a necessidade de produção de um gráfico, desenvolvimento teórico, diagrama simulink e script matlab, respectivamente.

O procedimento da Experiência 5 é apresentado a seguir. Por razões didáticas, parte do procedimento experimental da Experiência 3 deverá ser repetido, deixando assim claras as vantagens do esquema de controle em cascata.

4.5.1 Controle PD

1. Ajuste o sistema na configuração estável (Planta #1);

2. A partir das equações (2) e (3), determine os valores de k_p e k_d para produzir $f_n = 10$ Hz (20π rd/s) e $\xi = 1$ (amortecimento crítico) em malha fechada ⓣ . Caso não obtenha $0.15 < k_p < 0.35$ ou $0.004 < k_d < 0.012$, refaça seus cálculos;

3. Ajuste a coleta de dados do **Encoder #2** e **Commanded Position** através da caixa de diálogo **Set-up Data Acquisition** do menu **Data**, com amostragem de dados a cada dois períodos. Entre no menu **Command**, vá para **Trajectory** e selecione **Step-Set-up**. Selecione **Closed Loop Step** com tamanho de **1000** counts, duração de **1000 ms** e **uma repetição**. Retorne ao Background Screen clicando **OK** sucessivamente. O controlador está agora preparado para comandar um degrau de 1000 counts (cerca de 2 cm) para frente e para trás com dwell time de 1 s;

4. Entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** do menu **Set-up** e defina o período **Ts= 0.00442** s. Selecione **Continuous Time Control**. Selecione **PID** e **Set-up Algorithm**. Atribua os valores de k_p e k_d ($k_i = 0$) determinados no passo 2 (não atribua valores fora das faixas $0.15 < k_p < 0.35$ ou $0.004 < k_d < 0.012$), selecione **Encoder #2** para realimentação e clique **OK**;

5. Posicione o mecanismo com a haste no meio da sua excursão, de tal forma que o pêndulo fique aproximadamente na vertical. Selecione **Implement Algorithm** e clique **OK**;

6. Selecione **Execute** no menu **Command** e clique **Run**. A haste deve se movimentar para frente e para trás cerca de 2 cm, ao mesmo tempo em que o pêndulo balança devido à reação ao movimento da haste;

7. Exporte e plote (usando o script `plotRawData.m`) os dados do encoder #2 e da posição comandada no mesmo gráfico (eixo) ⓖ . Deve-se observar uma resposta criticamente amortecida com um tempo de subida (critério de 90%) de aproximadamente 60 ms.

4.5.2 Alocação de pólos para a planta estável

8. Determine os coeficientes dos polinômios $S(s)$ e $R(s)$ do controlador da malha externa que aloca os pólos do sistema em $-\pi - j\pi$, $-\pi + j\pi$ e -3π, resolvendo a equação de Sylvester (6) ⓣ .

9. Calcule o ganho do pré-filtro k_{pfc} que elimina o erro de regime através de (7) ⓣ .

10. Faça a coleta de dados de **Encoder # 1**, **Encoder # 2** e **Commanded Position** através do menu **Set-up Data Acquisition** a cada dois períodos de amostragem. No menu **Command**, selecione **Trajectory-Step-Set-up**. selecione **Closed Loop Step** e atribua amplitude de **500 counts**, duração de **2500 ms** e **1** repetição. Retorne ao **Background Screen** clicando **OK** sucessivamente. O controlador está agora em posição de comandar um degrau de 500 counts ($\approx$ 11 graus) para frente e para trás com *dweel time* de 2.5 s;

11. Entre na opção **Control Algorithm** do menu **Set-up**, atribua **Ts=0.00884 s** e selecione **Continuous Time Control**. Selecione **General Form** e **Set-up Algorithm** e atribua os valores de k_p e k_d ($k_i = 0$) obtidos com o projeto do controlador **PD**, os quais correspondem aos coeficientes e_0 e e_1 respectivamente. Atribua os coeficientes de $S(s)$ e $R(S)$ determinados no passo 8. Atribua o valor de k_{pfc} calculado no passo 9 que corresponde ao coeficiente t_0 da **General Form**. Assegure-se que $i_0 = 1$ para fechar a malha do loop interno, **Encoder # 1** está selecionado para o **Loop # 1** e que **Encoder # 2** está selecionado para o **Loop # 2**. Selecione **OK** para sair da caixa de diálogo de especificação do controlador;

12. Para evitar transitórios ao implementar o controlador, observe as seguintes instruções. Selecione **Abort Control** para se certificar de que o pêndulo pode ser manipulado com segurança. Ajuste a haste deslizante aproximadamente no meio do seu percurso, o que manterá o pêndulo na vertical. Certifique-se de que a caixa de acionamento do controlalor está ligada. Selecione **Reset Controller** no menu **Utility**. Não perturbe o pêndulo;

13. Volte à caixa de diálogo **Control Algorithm** e selecione **Implement Algorithm**. Se o pêndulo reagir violentamente, você pode ter implementado um controlador instável ou atribuído valores incorretos aos coeficientes do algoritmo de controle. Neste caso, refaça os passos anteriores. Se o pêndulo se comportar da maneira esperada, voce pode perturbá-lo ligeiramente da posição vertical e observar como a haste desliza numa tentativa de regular o sistema contra a perturbação. Mantenha o sistema em malha fechada pelo menor tempo possível para evitar desgaste excessivo de componentes (o pêndulo pode apresentar alguma *tremedeira* provocada por ruídos no sistema em malha fechada que não foram suficientemente atenuados). Neste caso incorpore o filtro passa-baixas com os parâmetros definidos por $g_1 = 0.008$ e $g0 = 1$;

14. Selecione **Jog Position** no menu **Utility** e atribua um *jog* absoluto de **-250 counts**. Você deverá observar que o pêndulo move-se no sentido horário cerca de 5.5 graus. Execute a trajetória comandada, exporte e plote os dados de **Encoder #1** e **Commanded Position** ⓖ

15. Os pólos de malha fechada dominantes são $-\pi - j\pi$ e $-\pi + j\pi$. Calcule ξ e ω_n associados a estes pólos dominantes e, em seguida, o máximo *overshoot* (M_p) e o tempo de estabelecimento (t_s) teoricamente esperados ⓣ . Compare os valores teóricos com os observados experimentalmente. Justifique as diferenças existentesⓣ .

4.5.3 Alocação de polos para a planta instável

16. Ajuste a posição dos contra-pesos em $l_t = 7.0$ cm, certificando-se que estão firmemente seguros. Os 'donuts' deverão estar também firmemente ajustados à haste. O pêndulo se encontra agora na configuração instável - Planta #2;

17. As especificações para o controlador PD são as mesmas da configuração estável. Entretanto, devido ao novo ajuste da posição dos contra-pesos, o momento de inércia da haste

se altera, com impacto na massa equivalente m^*; assim, este valor deverá ser recalculado. As especificações para os pólos de malha fechada da malha externa também são as mesmas da configuração estável, porém os passos de projeto e implementação deverão ser refeitos; naturalmente, em vista da nova configuração da planta #2;

18. Com o pêndulo na configuração instável, torna-se mais difícil mantê-lo inicialmente na posição de equilíbrio, antes da implementação do controlador. Este problema pode ser contornado com um pouco de prática;

19. Caso pêndulo não apresente *tremedeira*, repita os passos da seção 4.5.2 agora para o pêndulo na configuração instável. Caso apresente *tremedeira*, incorpore o filtro passa-baixas (vide seção 4.3) com os parâmetros definidos por $g_1 = 0.008$ e $g_0 = 1$, certificando-se que $f_0 = f_1 = 0$. Repita então os passos da seção 4.5.2;

20. Compare a resposta ao degrau com a obtida na configuração estável ⓣ .

4.6 Pré-relatório da Experiência 6

4.6.1 Modelo linearizado do pêndulo invertido com os dois graus de liberdade

Este modelo é obtido diretamente das equações de balanço de forças, do qual temos nos utilizado de forma ligeiramente diferente. As equações são as seguintes:

$$\begin{aligned}(m_1 s^2 + c_1 s)X(s) + (m_1 \ell_0 s^2 - m_1 g)\Theta(s) &= F(s) \\ [J^\star s^2 + c_r s - (m_1\ell_0 + m_2\ell_c)g]\Theta(s) + (m_1\ell_0 s^2 - m_1 g)X(s) &= 0\end{aligned} \tag{8}$$

vide pag. 54 do Manual [**?**]. Para a experiência será usado o pêndulo na configuração estável, resultando no centro de massa do contrapeso $\ell_{w2} = -0.1384$ cm. Lembrando ainda que ℓ_c é expresso por:

$$\ell_c = \frac{(m_{w2}\ell_{w2} + m_{2o}\ell_{co})}{m_2}$$

Fica a cargo do aluno verificar que as equações linearizadas utilizadas até aqui são equivalentes às equações em (8). Considere a notação:

$$\begin{aligned}D_x(s) &= m_1 s^2 + c_1 s \\ D_\theta(s) &= J^\star s^2 + c_r s - (m_1\ell_0 + m_2\ell_c)g \\ N_a(s) &= m_1\ell_0 s^2 - m_1 g\end{aligned} \tag{9}$$

De (8) e (9), podemos escrever

$$X(s) = \frac{1}{D_x(s)}(F(s) - N_a(s)\Theta(s)), \quad \Theta(s) = -\frac{N_a(s)}{D_\theta(s)}X(s)$$

Substituindo $\Theta(s)/X(s)$ na primeira equação acima, temos que $(D_x D_\theta - N_a^2)X = D_\theta F$, e assim

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{D_\theta(s)}{D(s)}, \quad \frac{\Theta(s)}{X(s)} = -\frac{N_a(s)}{D_\theta(s)}, \tag{10}$$

$$D(s) = D_x(s)D_\theta(s) - N_a(s)^2. \tag{11}$$

O *controle não-co-alocado* será objeto de estudos na Experiência 6 e baseia-se na existência de uma malha interna de controle PD do deslocamento x_1. O deslocamento x_1 é a variável que

exerce a ação sobre a variável de saída θ, por medio da interação entre a haste deslizante e a haste rotacional. Conforme deduzido acima, podemos escrever a função de transferência $\Theta(s)/F(s)$ na forma

$$\frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{N_1(s)}{D(s)} \cdot \frac{N_2(s)}{N_1(s)},$$

onde $D(s)$ é dado por (11) e

$$N_1(s) = k_s k_f k_x D_\theta(s) = k_s k_f k_x [J^\star s^2 + c_r s - (m_1 \ell_0 + m_2 \ell_c) g],$$
$$N_2(s) = -k_s k_f k_a N_a(s) = -k_s k_f k_a (m_1 \ell_0 s^2 - m_1 g)$$

de acordo com as expressões (9) e (10). Note que $F(s)$ tem sentido de força aplicada, mas está expressa em unidades apropriadas ao uso no ECP, em vista das constantes k_s, k_f, k_x e k_a.

4.6.2 Linhas gerais do projeto

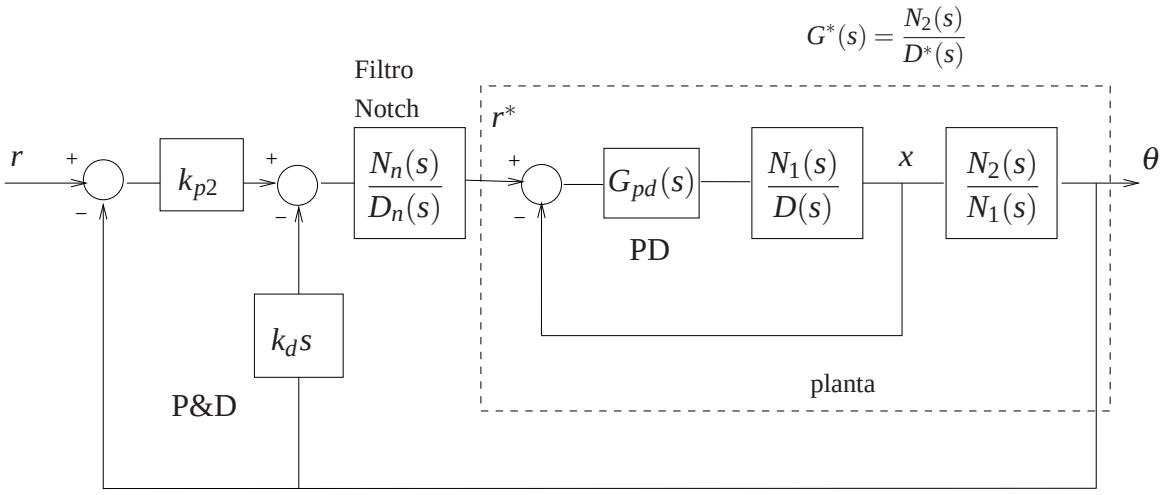

Figura 15: Diagrama para o controle não-co-alocado.

Adotaremos o esquema de controle representado na Fig. 15 e a determinação dos controladores será feito da seguinte maneira:

a. O controlador PD da malha interna tem a forma $G_{pd}(s) = k_{p1}(1 + \tau s)$, com $\tau = 0,0319$, isto é, o zero do controlador PD é fixo[3] Calcula-se inicialmente o ganho k_{p1} do controlador PD interno, utilizando-se o lugar das raízes (*root locus*) de modo a estabilizar a malha interna;

b. Obtém-se a função de transferência $G^*(s)$, representada pela linha pontilhada na Fig. 15;

c. Calculam-se os parâmetros do filtro *notch* $N_n(s)/D_n(s)$ de modo que:

   1. um zero do filtro cancele o pólo dominante. Caso os pólos dominantes sejam complexos conjugados, adote o zero negativo e igual ao módulo desses.

   2. dois outros zeros do filtro cancelem dois pólos de $G^*(s)$ (tipicamente pólos pouco amortecidos), isto é, raízes de $D^*(s)$ complexas conjugadas com parte imaginária grande.

[3] O valor de τ escolhido corresponde aproxidamamente ao valor k_d/k_p para o ajuste de comportamento criticamente amortecido da haste deslizante adotado nos experimentos anteriores.

3. o filtro possua dois pares de pólos reais parametrizados por $f_{n1} = 5$Hz e $f_{n2} = 11$Hz (freqüência natural) respectivamente, e $\xi = 2$ (fator de amortecimento) para ambos os pares.

4. o coeficiente do termo de maior grau do polinômio $D_n(s)$ deve ser 1 (polinômio *mônico*) e o ganho estático (DC) da função de transferência do filtro deve ser unitário;

d. Os parâmetros do controlador P&D da malha externa devem ser obtidos com o auxílio do diagrama do lugar das raízes *root locus*, por tentativas.

e. A implementação do filtro *notch* e controlador P&D será realizada utilizando a forma geral **General Form** do software do ECP, com a utilização dos polinômios $t(s)$, $s(s)$ e $r(s)$.

4.6.3 Detalhamento

Considere os passos a seguir para a realização do projeto do controle não-co-alocado. Adote os mesmos valores numéricos utilizados nas experiências anteriores.

Projeto da realimentação da haste deslizante:

Escreva um programa Matlab para executar os seguintes passos:

1. Implemente as funções de transferências da planta utilizando os valores numéricos para definir $X(s)/R^*(s)$,

2. Determine através do lugar das raízes *root locus* o valor de k_{p1} do controlador PD interno, de modo a estabilizar essa malha, fazendo que os pólos dominantes sejam rápidos, porém reais,

3. Implemente k_{p1} e determine os pólos da função de transferência interna $G^*(s)$. Selecione o pólo dominante p_1e os pólos complexos conjugados desta f.t. com parte imaginária grande, denominando-os p_2 e p_3.

Projeto do filtro notch:

1. Projete o filtro notch cujos os zeros sejam p_1, p_2 e p_3, e os pólos especificados no ítem c,

2. Associe $G^*(s)$ ao filtro projetado.

Projeto do controlador P&D:

1. Determine através do lugar das raízes o valor do ganho k_d de forma que a parte imaginária dos pólos que caminham para o semi-plano direito seja ligeiramente superior à parte real desses pólos.

2. Implemente o valor de k_d, e determine através do lugar das raízes o valor do ganho k_{p2} utilizando o mesmo critério para o ajuste do ganho k_d descrito no item anterior.

3. Utilize a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com $\theta(t)$ como saída, como critério para verificação da adequação do ajuste.

Implementação no software ECP:

O diagrama da Fig. 15 não pode ser implementado diretamente nesta forma. Mostre através de operações algébricas no diagrama de blocos, que o diagrama abaixo é equivalente ao da Fig. 15. Com essa modificação o controlador P&D mais filtro notch serão implementados na malha do *loop 1*.

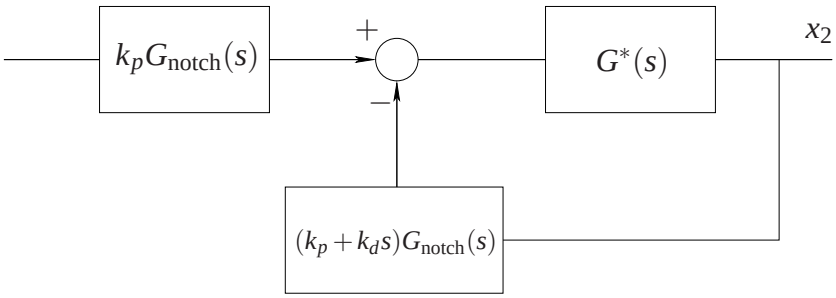

Figura 16: Representação do filtro *notch* + P&D implementado na malha do *loop 1*.

O bloco correspondente a $k_p G_{\text{notch}}(s)$ é implementado através dos polinômios $t(s)$ (numerador) e $r(s)$ (denominador). O bloco $(k_p + k_d s) G_{\text{notch}}(s)$ é implementado através dos polinômios $s(s)$ (numerador) e $r(s)$ (denominador). Denotando-se respectivamente o numerador e o denominador do filtro *notch* por $n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0$ e $s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0$, temos as seguintes relações entre os coeficientes dos polinômios:

$$
\begin{array}{lll}
t_0 = n_0 k_p & s_0 = n_0 k_p & r_0 = d_0 \\
t_1 = n_1 k_p & s_1 = n_0 k_d + n_1 k_p & r_1 = d_1 \\
t_2 = n_2 k_p & s_2 = n_1 k_d + n_2 k_p & r_2 = d_2 \\
t_3 = n_3 k_p & s_3 = n_2 k_d + n_3 k_p & r_3 = d_3 \\
 & s_4 = n_3 k_d & r_4 = 1
\end{array}
$$

1. O programa MATLAB final deve apresentar os coeficientes dos polinômios t, s e r para facilitar a implementação no laboratório.

2. Utilizando os programas MATLAB desenvolvidos, simule o sistema de controle não-co-alocado, de forma a poder fazer comparações com os resultados experimentais a serem obtidos na Experiência 6.

Sugestão:

Para escrever os programas MATLAB, podem ser utilizados os seguintes comandos

Rotinas para construção de funções de transferência: `tf, zpk, feedback, minreal`

Rotinas para obtenção do lugar das raízes e ganhos: `rlocus, sgrid, rlocfind, dcgain`

Rotinas para obtenção de resposta temporal: `step, impulse`

5 Sistema Levitador: Controle Co-alocado

O objetivo desta experiência é realizar o controle P&D do sistema levitador quando este se apresenta na configuração chamada de *dois graus de liberdade*, que envolve o uso de dois discos posicionados de forma a gerar força de repulsão entre eles. Nesta experiência será analisada uma estratégia conhecida como *controle co-alocado*. Por controle co-alocado, entende-se a situação em que o atuador e o sensor estão *co-alocados* no disco que se deseja controlar[4], mas com alguma outra massa interferindo no movimento do sistema.

5.1 Sistema com dois graus de liberdade

O sistema com dois graus de liberdade utilizado nesta experiência pode ser modelado a partir da análise da Fig. 17.

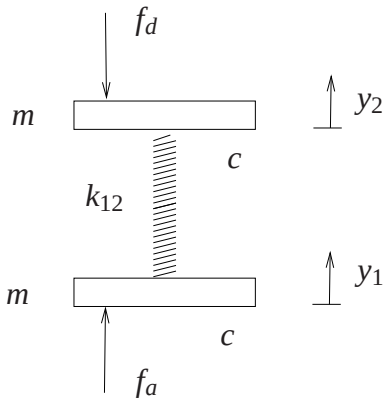

Figura 17: Sistema com dois graus de liberdade e compensação da força do atuador.

É possível escrever as seguintes equações diferenciais:

$$m\ddot{y}_1 + c\dot{y}_1 + k_{12}y_1 - k_{12}y_2 = F_a(t)$$
$$m\ddot{y}_2 + c\dot{y}_2 + k_{12}y_2 - k_{12}y_1 = F_d(t)$$

Fazendo $F_d \equiv 0$, e aplicando-se a transformada de Laplace em ambas as equações e resolvendo-as para y_1 e y_2 tem-se:

$$\frac{Y_1(s)}{F_a(s)} = \frac{ms^2 + cs + k_{12}}{D(s)} = \frac{N_1(s)}{D(s)}$$
$$\frac{Y_2(s)}{F_a(s)} = \frac{k_{12}}{D(s)} = \frac{N_2(s)}{D(s)}$$

$$D(s) = m^2s^4 + 2cms^3 + (2mk_{12} + c^2)s^2 + 2ck_{12}s.$$

onde

$Y_1(s)$: deslocamento linear do disco #1;
$Y_2(s)$: deslocamento linear do disco #2;
$F_a(s)$: força aplicada ao disco #1;
m e c : massa e coeficiente de atrito viscoso dos discos #1 e #2;
k_{12} : constante da mola conectando os discos #1 e #2.

[4] O termo *co-alocado* é uma tradução livre da expressão em inglês *collocated*.

O que distingue as duas funções de transferência acima é a existência de dois zeros na função $Y_1(s)/F_a(s)$, os quais deverão ser levados em conta caso se deseje adotar uma estratégia de controle co-alocado (controle do disco #1).

5.2 Configuração

A seguinte configuração será adotada nesta experiência:

- Discos #1 e #2 posicionados de forma a gerar força de repulsão entre os discos;
- Implementação por software da compensação da força do atuador magnético (bobina).

Dados:

$m_1, m_2 = 0,123$ kg	massa dos discos
$c = 0,4078$ N/(m/s)	coeficientes de atrito dos discos
$k_{12} = 37,18$ N/m	constante de mola
$k_{sys} = 100$	ganho do sistema

5.3 Controle co-alocado

O esquema de controle co-alocado é o representado na Fig. 18.

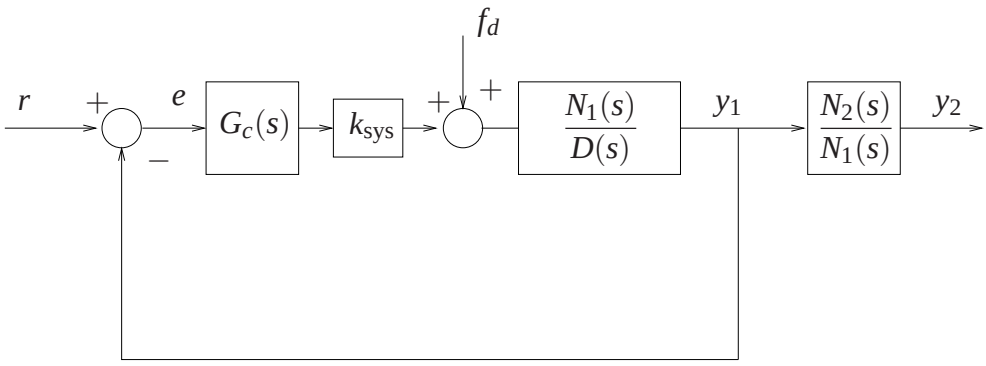

Figura 18: Controle sujeito a perturbações.

Observe que o efeito do disco #2 está modelado na função de transferência $N_1(s)/D(s)$ presente no diagrama de blocos. O procedimento para a obtenção do controlador PID é iterativo e parte do controlador obtido na Experiência 3, e que também foi utilizado na Experiência 4.

5.3.1 Procedimento experimental

Nota: Os símbolos ⓖ , ⓣ , ⓓ e ⓢ indicam a necessidade de produção de um gráfico, desenvolvimento teórico, diagrama simulink e script matlab, respectivamente.

Inicialização do Levitador

Este procedimento se refere ao experimento com dois discos magnéticos montados.

1. No menu **File** carregue os parâmetros de calibração do sensor. Através da opção **Load Settings** carregue o arquivo `Cal.cfg` que se encontra na pasta `/ea722/programas`. Entre no menu **Setup**, **Sensor Calibration**, selecione a opção **Calibrate Sensor** $Y_{cal} = a/Y_{raw} + f/\mathbf{sqrt}(Y_{raw}) + g + h * Y_{raw}$ e habilite a opção **Apply Thermal Compensation**.

2. Entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** e verifique se **Ts=0.001768s**. Carregue o algoritmo `Cal_2d.alg` que se encontra na pasta `/ea722/programas` através da opção **Load from disk**. Em seguida selecione **Implement Algorithm**. O disco irá se mover para a altura de aproximadamente $1,0$ [cm] mantendo-se nesta posição;

3. Verifique se o **Sensor 1 Pos** está indicando o valor de 10000 $\pm$500 [counts]. Caso isso não ocorra, entre no menu **Setup**, **Sensor Calibration**, selecione a opção **Calibrate Sensor** e ajuste o termo g da calibração para que a leitura do **Sensor 1 Pos** no fundo de tela seja próximo 10000 [counts];

4. Selecione **Execute** no menu **Command** e em seguida **Trajectory #2 only**; depois plote as variáveis **Commanded Position**, **Variable Q10** e **Variable Q13**. Verifique se a trajetória das variáveis Q10 e Q13 apresentam pelo menos duas oscilações acima do valor de regime. Caso isso não ocorra, solicite a presença do professor.

Após a conclusão deste procedimento, clique no botão **Abort Control** no fundo de tela.

1. Para realização dos ensaios carregue o algoritmo `exp5.alg` que se encontra na pasta `/ea722/programas`, através da opção **Load from disk**. Selecione **Edit Algorithm** para introduzir modificações nos valores de k_p, k_d e k_i no programa.

   Ajuste no programa `exp5.alg` os ganhos do controlador para $k_p = 0,5$, $k_d = 0,05$ e $k_i = 0,5$;

2. Através da caixa de diálogo **Set-up Data Acquisition** do menu **Data**, ajuste a coleta dos dados de **Command Position**, incluindo também a coleta das seguintes variáveis:

   - posição y_1 relativa ao ponto de equilíbrio inicial. No programa é a variável `delta_y`;
   - esforço incremental de controle. No programa é a variável `delta_u`;
   - posição y_2 absoluta. No programa é a variável `sensor2_pos`.

   Para isto, verifique no programa se estas variáveis estão associadas as variáveis de saídas `q10,q11,q12` ou `q13`, e ajuste no menu **Data** a coleta de dados das variáveis correspondentes. Especifique uma amostragem de dados a cada 5 ciclos;

3. Entre no menu **Command**, vá para **Trajectory #1** e selecione **Step**. Ajuste um degrau com amplitude de **15000** counts, dwell time=**1000** ms e **1** (uma) repetição. Certifique-se que a opção **Unidirectional Move Only** esteja habilitada;

4. Selecione **Execute** no menu **Command** e em seguida **Trajectory #1 only**; depois exporte e plote (usando o script `plotRawData.m`) os resultados experimentais obtidos ⓖ ;

5. Ajuste iterativamente os ganhos k_p e k_d até obter uma resposta adequada. Faça os ajustes de ganho gradualmente (nunca maiores que 50% de uma só vez) observando os efeitos de aumentar ou diminuir cada um deles. Não utilize $k_p > 3$ e mantenha $0.02 < k_d < 0.1$[5] Tente atingir o seguinte objetivo para o disco #1: tempo de subida < 200 ms (para 90% do valor de regime) e *overshoot* $\leq 10\%$, sem oscilações excessivas. Exporte e plote a melhor resposta obtida ⓖ . Desloque manualmente os discos #1 e #2 (toque somente as bordas dos discos), e observe a rigidez relativa do dos discos;

6. Para a última resposta obtida no passo anterior, exporte e plote a resposta ao degrau do disco #2 ⓖ . Qual é a característica predominante do movimento do disco #2 ⓣ ? É possível explicar as diferenças observadas nas respostas ao degrau dos dois discos a partir das diferenças de suas funções de transferência ⓣ ?

7. Entre no menu **Command** vá para **Trajectory #2** e selecione **Impulse**. Ajuste um impulso unidirecional com **Amplitude = 20000 counts**, **Pulse Width = 1000 ms**, **Dwell Time =1000 ms** e **2** repetições. Vá para **Trajectory #1** e selecione **Step**. Ajuste um degrau com amplitude de **0** counts, **Dwell Time= 2000 ms** e **1** (uma) repetição.

8. Na opção **Command**, menu **Execute**, selecione **Execute Trajectory #1 first then Trajectory #2 with delay**, e faça esse atraso ser de **500 ms**. Em seguida execute com o botão **Run**. Exporte e plote os resultados ⓖ e observe o resultado da perturbação em cada disco;

9. Verifique se a resposta ao degrau da variável y_2 apresenta um *overshoot* máximo inferior a 10%, sem oscilações excessivas, e com o menor tempo de subida possível. Se necessário, altere iterativamente k_p e k_d utilizando os valores existentes como ponto de partida. Exporte e plote as respostas finais e anote os ganhos correspondentes ⓖ . Desloque manualmente os discos #1 e #2 e observe a rigidez relativa de cada um discos. De maneira geral, a rigidez observada aumentou ou diminuiu em relação ao observado no item 5 ⓣ ? Compare o erro em regime do controlador obtido neste item com o obtido no item 5ⓣ .

10. Repita os itens 7 e 8 com os valores de k_p e k_d encontrados no item anterior, fornecendo as mesmas respostas e gráficos.

11. A partir da Fig. 18, calcule a função de transferência entre a variável x_1 e a força de distúrbio F_d ⓣ . O inverso do ganho estático da função (ganho da função em $s = 0$) obtida é chamado de *servo-rigidez estática* e é uma medida da rigidez observada no item anterior. Calcule a servo-rigidez estática dos controladores obtidos nos itens 1 e 9 e compare-os com os observados ⓣ .

12. Repita o item anterior para a variável x_2, respondendo as mesmas perguntas.

[5] Se o sistema apresentar comportamento irregular (ruidoso), diminua o ganho k_d, e se estiver muito oscilatório, aumente k_d.

5.3.2 Exercícios sugeridos

1. Verifique no Matlab o ajuste encontrado, através da rotina `rlocus` de lugar das raízes. Faça outras determinações dos ganhos k_p e k_d que exibam bons ajustes de malha fechada;

2. Faça o mesmo procedimento "experimental"através de simulação utilizando agora o controlador P&D.

5.4 Pré-relatório da Experiência 6

O *controle não-co-alocado* será objeto de estudos na Experiência 6 e baseia-se na existência de uma malha interna de controle de velocidade do deslocamento y_1, responsável pelo ajuste do amortecimento. O deslocamento y_1 é a variável que exerce a ação sobre a variável de saída y_2, por intermédio da interação magnética entre os discos. De fato, é possível reescrever a função de transferência entre $Y_2/F(s)$ na forma

$$\frac{Y_2(s)}{F(s)} = \frac{N_1(s)}{D(s)}\frac{N_2(s)}{N_1(s)},$$

onde

$$N_1(s) = m_2 s^2 + c_2 s + k_{12}, \quad N_2(s) = k_{12}$$
$$D(s) = m_1 m_2 s^4 + (c_1 m_2 + c_2 m_1)s^3 + [(m_1 + m_2)k_{12} + c_1 c_2]s^2 + (c_1 + c_2)k_{12} s.$$

com $m_1 = m_2 = m$.

Note que $F(s)$ tem sentido de força aplicada, mas está expressa em unidades apropriadas ao uso no ECP, em vista da constante k_{sys}.

5.4.1 Linhas gerais do projeto

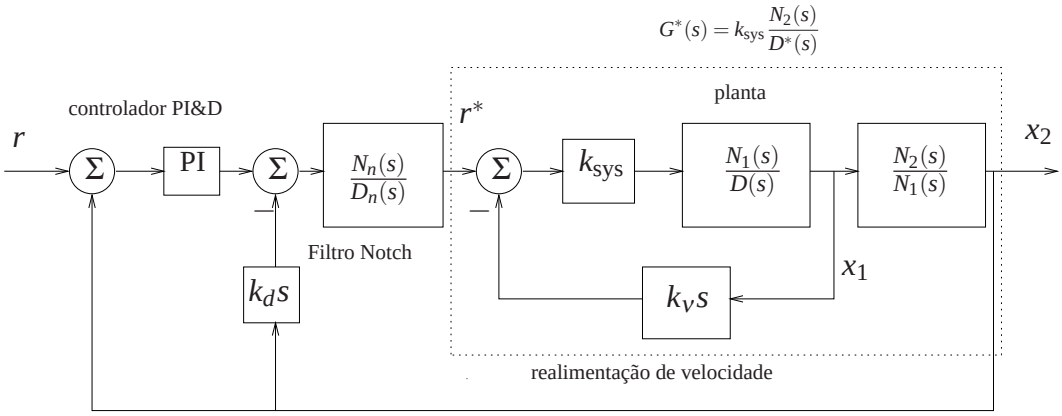

Figura 19: Diagrama para o controle não-colocado.

Adotaremos o esquema de controle representado na Fig. 19 e a determinação dos controladores será feito da seguinte maneira:

a. Calcula-se inicialmente o ganho k_v, utilizando-se o lugar das raízes (*root locus*) da malha interna, de modo que ele tenha o maior valor possível tal que o amortecimento dos pólos em malha fechada de $Y_1(s)/R^*(s)$ tenha valor 0,2;

b. Obtém-se a função de transferência $G^*(s)$, representada pela linha pontilhada na Fig. 19;

c. Calculam-se os parâmetros do filtro *notch* $N_n(s)/D_n(s)$ de modo que:

1. os dois zeros do filtro cancelem dois pólos de $G^*(s)$ (tipicamente pólos pouco amortecidos), isto é, raízes de $D^*(s)$ complexas conjugadas.

2. o filtro possua um par de pólos complexos conjugados de freqüência natural $f_n = 8$Hz e $\xi = \sqrt{2}/2$.

3. o coeficiente do termo de maior grau do polinômio $D_n(s)$ deve ser 1 (polinômio *mônico*) e o ganho estático (DC) da função de transferência do filtro deve ser unitário. Considere assim a seguinte representação para o filtro notch a ser utilizado.

$$G_{\text{notch}}(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Então $a_0 = b_0$;

d. Os parametro do controlador PI&D devem ser obtidos com o auxílio do diagrama do lugar das raízes, adotando-se os critérios especificados na seção Detalhamento.

5.4.2 Detalhamento

Considere os passos a seguir para a realização do projeto do controle não-co-alocado. Adote os mesmos valores numéricos utilizados na Experiência 5.

Projeto da realimentação do disco 1:

Escreva um programa Matlab para executar os seguintes passos:

1. Implemente as funções de transferências da planta utilizando os valores numéricos para definir $Y_1(s)/R^*(s)$,

2. Determine através do lugar das raízes *root locus* o valor de k_v de acordo com o especificado no item a,

3. Implemente k_v e determine os pólos da função de transferência interna $G^*(s)$. Selecione os pólos complexos conjugados desta f.t., denominando-os p_1 e p_2.

Projeto do filtro notch:

1. Projete o filtro notch cujos os zeros sejam p_1 e p_2, e os pólos especificados no ítem c,

2. Associe $G^*(s)$ ao filtro projetado.

Projeto do controlador PI&D:

1. Determine o ganho k_d de forma que os polos dominantes apresentem freqüência natural em torno de 50 rd/s e fator de amortecimento 0,56;

2. A parte PI do controlador tem a seguinte função de transferência:

$$G_{PI}(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{\tau s}\right)$$

   Assumindo que $\tau = 1,5$, a determinação do ganho k_p deve ser obtido com o auxílio do diagrama do lugar das raízes *root locus*, adotando-se o critério de amortecimento em torno de $0,6$ e freqüência natural em torno de 40 rd/s;

3. Utilize a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com $y_2(t)$ como saída, como critério para verificação da adequação do ajuste.

   Utilizando os programas MATLAB desenvolvidos, simule o sistema de controle não-co-alocado, de forma a poder fazer comparações com os resultados experimentais a serem obtidos na Experiência 6.

Sugestão:

Para escrever os programas MATLAB, podem ser utilizados os seguintes comandos

Rotinas para construção de funções de transferência: `tf, zpk, feedback, minreal`

Rotinas para obtenção do lugar das raízes e ganhos: `rlocus, sgrid, rlocfind, dcgain`

Rotinas para obtenção de resposta temporal: `step, impulse`

Rotina para conversão de modelos a tempo contínuo para tempo discreto: `c2d`

Referências

[1] P. A. V. Ferreira. Introdução aos sistemas de controle. Notas de aula do Prof. Paulo Valente, FEEC-UNICAMP, 1999, http://www.dt.fee.unicamp.br/~jbosco/ea722/rotaula0.pdf.

[2] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Pearson, Upper Saddle River, NJ, 6 edition, 2009.

[3] J. C. Geromel and A. G. B. Palhares. *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*. Blucher, São Paulo, SP, 2004.

[4] K. Ogata. *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, RJ, 3 edition, 1998.

[5] Educational Control Products: ECP Systems. *Manual for Model 505 – Inverted Pendulum*, 1994.

[6] Educational Control Products: ECP Systems. *Manual for Model 220 – Industrial Emulator/Servo Trainer*, 1995.

[7] Educational Control Products: ECP Systems. *Manual for Model 205/205a – Torsional Control System*, 1997.

[8] Educational Control Products: ECP Systems. *Manual for Model 210/210a – Rectilinear Control System*, 1998.

[9] Educational Control Products: ECP Systems. *Manual for Model 730 – Magnetic Levitation System*, 1999.

Roteiro – Correção

Emulador

C3 ⓣ

1. ⓖ ⓖ
2. ⓖ
3. ⓖ ⓖ ⓖ
4. ⓣ ⓖ ⓖ ⓣ
5. ⓖ
6. ⓖ
7. ⓣ
8. ⓖ ⓖ ⓖ ⓣ ⓣ

Torcional 1

2. ⓖ
3. ⓖ
4. ⓖ ⓣ ⓣ
5. ⓖ ⓣ ⓣ ⓣ
6. ⓣ ⓣ
7. ⓣ ⓣ

Torcional 2

2. ⓖ
3. ⓖ
4. ⓖ ⓣ ⓣ
5. ⓖ ⓣ ⓣ ⓣ
6. ⓣ ⓣ
7. ⓣ ⓣ

Retilíneo 1

2. ⓖ
3. ⓖ
4. ⓖ ⓣ ⓣ
5. ⓖ ⓣ ⓣ ⓣ
6. ⓣ ⓣ
7. ⓣ ⓣ

Retilíneo 2

2. ⓖ
3. ⓖ
4. ⓖ ⓣ ⓣ
5. ⓖ ⓣ ⓣ ⓣ
6. ⓣ ⓣ
7. ⓣ ⓣ

Emulador

C3 ⓣ

1. ⓖ ⓖ
2. ⓖ
3. ⓖ ⓖ ⓖ
4. ⓣ ⓖ ⓖ ⓣ
5. ⓖ
6. ⓖ
7. ⓣ
8. ⓖ ⓖ ⓖ ⓣ ⓣ