

EA619 - Laboratório de Análise Linear

Experiência 5: Identificação do Parâmetros dos Equipamentos ECP: Resposta em Frequência

Prof. Ricardo C.L.F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2º Semestre 2015

- Definição: A resposta em frequência de um sistema dinâmico é definida como a resposta do sistema, em regime estacionário, a uma entrada senoidal.
- Objetivo: Utilizar o método da resposta em frequência como uma abordagem alternativa para a análise e projeto de sistemas.

A resposta de um sistema linear invariante no tempo a uma entrada senoidal **é também senoidal**, podendo diferir da entrada apenas em magnitude e fase.

Transformada de Laplace

Considere agora a classe de funções $f(t)$ contínuas por partes, tais que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-\sigma t) |f(t)| \rightarrow 0$$

para algum $\sigma > 0$ e $f(t) = 0$, para $t < 0$.

Para essa classe de funções define-se a **Transformada de Laplace** de $f(t)$ como

$$F(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt$$

Exemplo $f(t) = \exp(at)$, $t \geq 0$, a complexo.

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{para } \operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}[a]$$

■ Propriedade:

A Transformada de Laplace de $f^{(n)}(t)$ é dada por

$$s^{(n)} F(s) - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

onde $F(s)$ é a Transformada de Laplace de $f(t)$ e $f^{(k)}(0)$ é a k -ésima derivada de $f(t)$ calculada em $t = 0$.

Função de Transferência I

Considere o sistema linear descrito pela equação diferencial

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0y(t) &= \\ &= b_m\frac{d^m}{dt^m}u(t) + b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}u(t) + \cdots + b_1\frac{d}{dt}u(t) + b_0u(t)\end{aligned}$$

com condições iniciais nulas. Tomando a Transformada de Laplace

$$\begin{aligned}\left(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0\right)Y(s) &= \\ &= \left(b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0\right)U(s)\end{aligned}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

■ Note que $G(s)$

- é a Função de Transferência de $U(s)$ para $Y(s)$;
- caracteriza unicamente um sistema linear invariante no tempo;
- é independente da entrada;
- os pólos e zeros finitos de $G(s)$ são, respectivamente, as raízes dos polinômios $D(s)$ e $N(s)$.

Resposta à Entrada Senoidal

Seja um sistema linear invariante no tempo

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n)}$$

no qual, por simplicidade, assume-se que os pólos de $G(s)$, s_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são distintos e têm parte real negativa.

A resposta em regime estacionário é $y_e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$. Supondo $u(t) = A \sin(\omega t)$ com Transformada de Laplace $U(s)$, tem-se

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} U(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \left(\frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \right) = \\ &= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{c_1}{s + s_1} + \frac{c_2}{s + s_2} + \cdots + \frac{c_n}{s + s_n} \end{aligned}$$

sendo que a e c_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são constantes e \bar{a} é o conjugado de a .

Transformada Inversa de $Y(s)$ I

$$y(t) = a \exp(-j\omega t) + \bar{a} \exp(j\omega t) + c_1 \exp(-s_1 t) + c_2 \exp(-s_2 t) + \cdots \\ \cdots + c_n \exp(-s_n t), \quad t > 0$$

Portanto,

$$y_e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = a \exp(-j\omega t) + \bar{a} \exp(j\omega t)$$

onde

$$a = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{AG(-j\omega)}{2j}$$

$$\bar{a} = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = -\frac{AG(j\omega)}{2j}$$

Como $G(s)$ é uma função complexa, tem-se

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \exp[j\phi(\omega)]$$

Transformada Inversa de $Y(s)$ II

sendo

$$\phi(\omega) = \arg \tan \left[\frac{\operatorname{Im} G(j\omega)}{\operatorname{Re} G(j\omega)} \right]$$

Analogamente,

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| \exp[-j\phi(\omega)] = |G(j\omega)| \exp[-j\phi(\omega)]$$

Portanto

$$\begin{aligned} y_e(t) &= A |G(j\omega)| \frac{\exp[j(\omega t + \phi(\omega))] - \exp[-j(\omega t + \phi(\omega))]}{2j} \\ &= A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega)) = B \sin(\omega t + \phi(\omega)) \end{aligned}$$

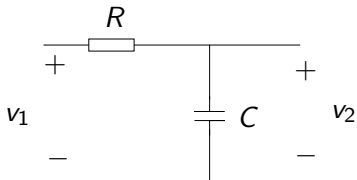
onde $B = A |G(j\omega)|$.

- Um sistema linear, assintoticamente estável, invariante no tempo e sujeito a uma entrada senoidal, possui em regime estacionário uma saída senoidal com a mesma frequência de entrada, porém com amplitude e ângulo de fase em geral distintos.

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \right| = \text{Relação de amplitude entre a saída senoidal e a entrada senoidal.}$$

$$\phi(j\omega) = \text{Defasagem da saída senoidal em relação à entrada senoidal.}$$

Exemplo I



$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{sRC + 1}$$

Fazendo $s = j\omega$ e definindo $\omega_1 = \frac{1}{RC}$,

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) + 1}$$

Exemplo II

e portanto

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + 1}}, \quad \phi(\omega) = -\arg \tan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$$

Para $v_1(t) = A \sin(\omega t)$

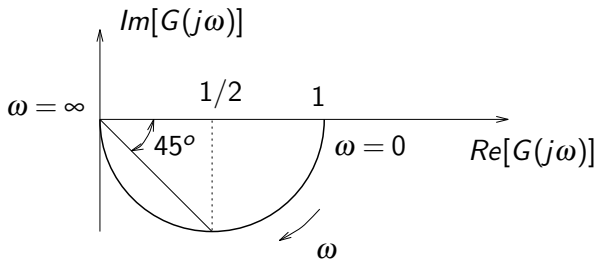
$$v_2(t) = \frac{A}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + 1}} \sin\left(\omega t - \arg \tan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)\right)$$

e para

- $\omega = 0$, $|G(j\omega)| = 1$ e $\phi(\omega) = 0$;
- $\omega = \omega_1$, $|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\phi(\omega) = -45^\circ$;
- $\omega \rightarrow \infty$, $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ e $\phi(\omega) = -90^\circ$.

Exemplo III

■ Gráfico Polar de $G(j\omega)$



Diagramas de Bode I

Gráficos logarítmicos para a determinação da resposta em frequência de um sistema.

$$G(j\omega) = |G(\omega)| \exp[j\phi(\omega)]$$

■ Diagrama de Magnitude

Ganho logarítmico $20 \log |G(j\omega)|$ em (dB) $\times \omega$

■ Diagrama de Fase

Fase $\phi(\omega)$ em graus $\times \omega$

■ Exemplo Circuito RC

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}, \quad \tau = RC$$

Ganho Logarítmico

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \right) = -10 \log (1 + (\omega\tau)^2)$$

Para $\omega \ll 1/\tau$, tem-se

$$20 \log |G(j\omega)| = -10 \log(1) = 0 \text{ dB}$$

Para $\omega \gg 1/\tau$, tem-se

$$20 \log |G(j\omega)| = -20 \log(\omega\tau)$$

Quando $\omega = 1/\tau$ (frequência de corte)

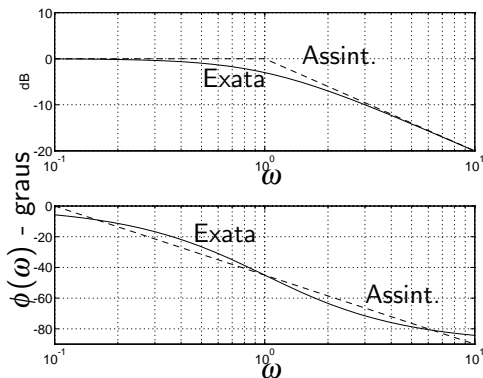
$$20 \log |G(j\omega)| = -10 \log(2) = -3 \text{ dB}$$

Diagramas de Bode III

Ângulo de Fase

$$\phi(\omega) = -\arg \tan(\omega\tau)$$

Diagramas de Bode para $(1+j\omega\tau)^{-1}$, $\tau = 1$.



Generalizando

$$G(j\omega) = \frac{k_b \prod_{i=1}^Q (1 + j\omega\tau_i)}{(j\omega)^N \prod_{m=1}^M (1 + j\omega\tau_m) \prod_{k=1}^R \left[1 + (2\xi_k/\omega_{nk})j\omega + (j\omega/\omega_{nk})^2 \right]}$$

Q zeros, N pólos na origem, M pólos reais e R pares de pólos complexos conjugados.

■ Ganho Logarítmico

$$20 \log |G(j\omega)| =$$

$$\begin{aligned} & 20 \log(k_b) + 20 \sum_{i=1}^Q \log |1 + j\omega\tau_i| - 20 \log |(j\omega)^N| - \\ & 20 \log \sum_{m=1}^M |1 + j\omega\tau_m| - 20 \sum_{k=1}^R \log \left| 1 + \left(\frac{2\xi_k}{\omega_{nk}} j\omega \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_{nk}} \right)^2 \right| \end{aligned}$$

■ Ângulo de Fase

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^Q \arg \tan(\omega \tau_i) - N \times 90^\circ - \sum_{m=1}^M \arg \tan(\omega \tau_m) - \sum_{k=1}^R \arg \tan \left(\frac{2\xi_k \omega_{nk} \omega}{\omega_{nk}^2 - \omega^2} \right)$$

Características Assintóticas dos Diagramas de Bode I

(a) Ganho constante k_b

- Ganho Logarítmico = $20 \log(k_b) = \text{constante em dB}$
- Ângulo de fase = 0

(b) Pólos ou Zeros na origem: $(j\omega)^{\pm N}$

- Ganho Logarítmico = $20 \log |(j\omega)^{\pm N}| = \pm 20N \log |j\omega|$
- Inclinação das curvas de magnitude = $\pm 20N \text{ dB/década}$
- Ângulo de fase = $\pm 90N$

Características Assintóticas dos Diagramas de Bode II

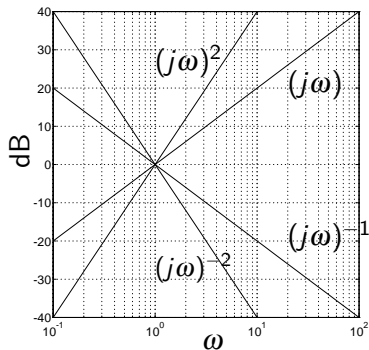


Diagrama de Magnitude para $(j\omega)^{\pm N}$.

Características Assintóticas dos Diagramas de Bode III

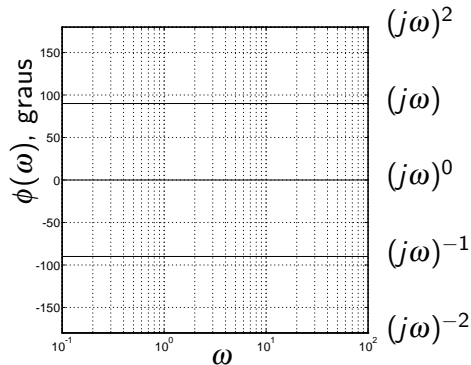


Diagrama de Fase para $(j\omega)^{\pm N}$.

(c) Pólos ou Zeros Reais: $(1+j\omega\tau)^{\pm 1}$

- Ganho Logarítmico = $20 \log |(1+j\omega\tau)^{\pm 1}| = \pm 10 \log (1 + \omega^2 \tau^2)$
- Assíntota para $\omega \ll 1/\tau$ é igual a 0 dB
- Assíntota para $\omega \gg 1/\tau$ é igual a $\pm 20 \log \omega\tau$, com inclinação de ± 20 dB/década.
- Interseção: $-20 \log(\omega\tau) = 0$ dB (frequência de corte $\omega = 1/\tau$).
- Ganho Logarítmico em $\omega = 1/\tau$ é igual a ± 3 dB
- Ângulo de fase = $\pm \arg \tan(\omega\tau)$

(d) Pólos ou Zeros Conjugados: $[1 + (2\xi/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2]^{\pm 1}$

- Reescrevendo na forma $[1 + j2\xi u - u^2]^{\pm 1}$ sendo que $u = \omega/\omega_n$, tem-se:
- Ganho Logarítmico = $\pm 10 [\log ((1 - u^2)^2 + 4\xi^2 u^2)]^{\pm 1}$
- Ângulo de fase = $\pm \arg \tan \left(\frac{2\xi u}{1 - u^2} \right)$
- Para $u \ll 1$ ($u = \omega/\omega_n$; $\omega \ll \omega_n$)
- Assíntota = 0 dB
- Ângulo de fase $\rightarrow 0$
- Para $u \gg 1$
- Assíntota = $\pm 10 \log u^4 = \pm 40 \log u$
- Inclinação da assíntota = ± 40 dB/década
- Ângulo de fase $\rightarrow \mp 180^\circ$
- Interseção: $\omega/\omega_n = 1$

Características Assintóticas dos Diagramas de Bode VI

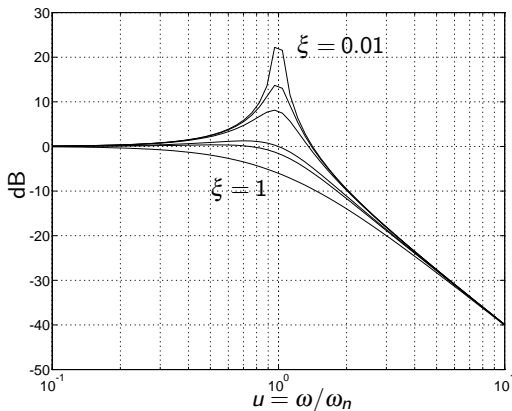


Diagrama Magnitude para $[1 + (2\xi\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$.

Características Assintóticas dos Diagramas de Bode VII

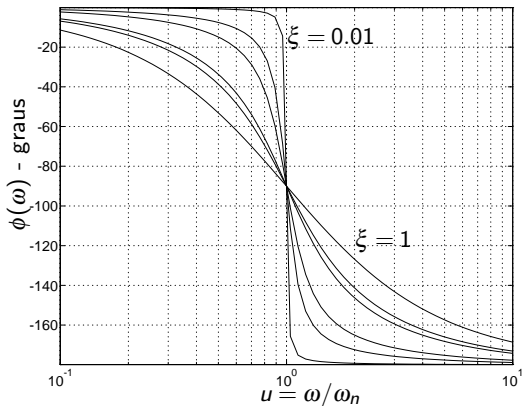


Diagrama Fase para $[1 + (2\xi\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$.

- Para um par de pólos complexos conjugados, o valor máximo da resposta em frequência M_p ocorre na frequência de ressonância ω_r , onde

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad , \quad \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$$

$$M_p = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \quad , \quad \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

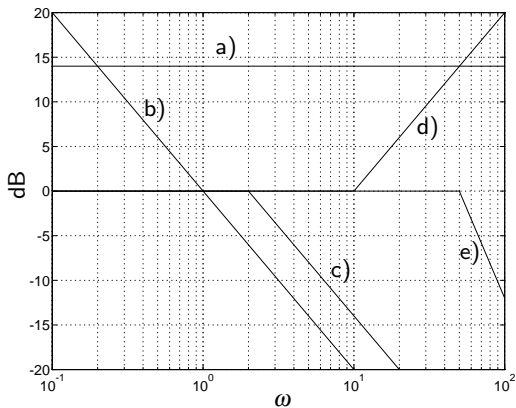
Exemplo I

$$G(j\omega) = \frac{5(1 + j0.1\omega)}{j\omega(1 + j0.5\omega)[1 + j0.6(\omega/50) + (j\omega/50)^2]}$$

Os seguintes fatores ocorrem:

- a) Um ganho constante $K = 5$.
- b) Um pólo na origem.
- c) Um pólo em $s = -2$.
- d) Um zero em $s = -10$.
- e) Um par de pólos complexos conjugados com $\omega_n = 50$ e $\xi = 0.3$

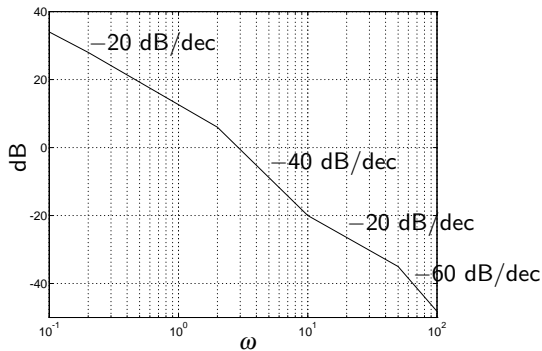
Exemplo II



Ganhos Assintóticos dos pólos e zeros.

Exemplo III

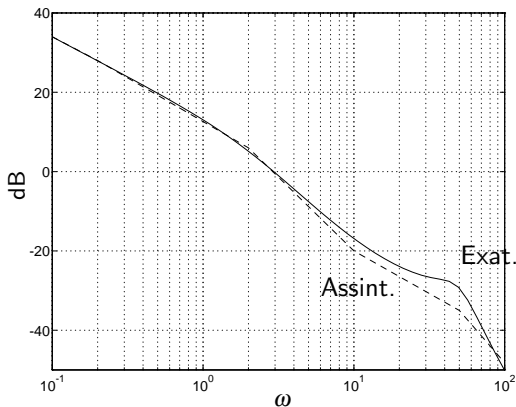
Adicionando-se os diversos ganhos



Ganho assintótico.

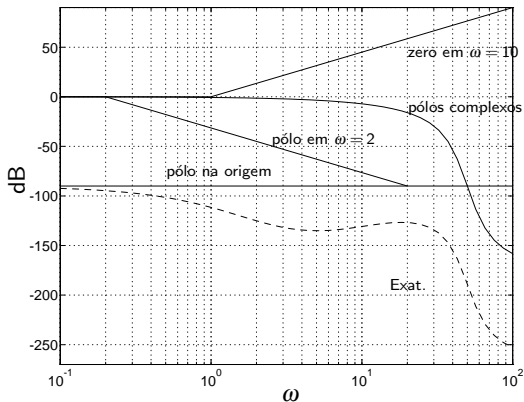
Exemplo IV

■ Diagramas de Magnitude (assintótico e exato)



Exemplo V

■ Diagramas de Fase (assintótico e exato)



Resposta em frequência

- Resposta em frequência de sistema linear, assintoticamente estável, invariante no tempo



Relação de amplitudes entre a saída senoidal e a entrada senoidal.

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \right|$$

Defasagem da saída senoidal em relação à entrada senoidal.

$$\angle G(j\omega) = \phi(j\omega)$$

ω : frequência da entrada senoidal com Amplitude A_0 .

Sistemas de segunda ordem

$$G(s) = \frac{k_{hw} \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

$0 \leq \xi < \sqrt{2}/2$: diagrama de módulo apresenta um pico de ressonância M_p .

■ Identificação pela resposta em frequência de sistemas de 2a. ordem: determinar experimentalmente os diagramas de Bode, obtendo ξ e ω_n e relacioná-los com os parâmetros físicos.

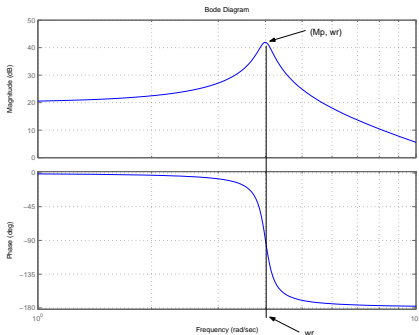


Diagrama de Bode de um sistema de 2a. ordem sub-amortecido

Etapas

- Configura-se o sistema para uma condição sub-amortecida;
- Submete-se o sistema a uma entrada senoidal com amplitude conhecida;
- Faz-se uma análise preliminar para obter a localização da frequência de ressonância (identificação temporal feita na experiência 6);
- Escolhe-se frequências de entrada dentro de uma faixa próxima a obtida na identificação preliminar;
- Procura-se criteriosamente a frequência de ressonância ω_r , anotando-se o valor de pico de ressonância $M_p(\omega_r)$;

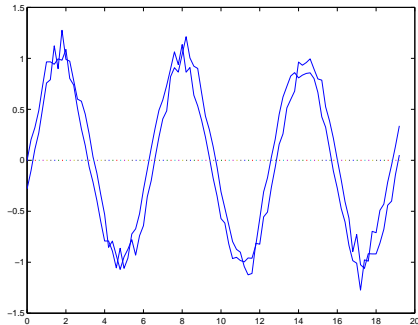
$$M_p = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$$

- O valor de ξ pode ser obtido diretamente da medida de M_p ;
- O valor da frequência ω_n pode ser obtido da medida de ω_r e do valor de ξ calculado no passo anterior.

- Medir a relação de amplitudes entre entrada e saídas senoidais e a defasagem desses dois sinais;
- Minimizar impurezas contidas no sinal medido, semelhante à curva da figura, devido a
 - imperfeições do medidor;
 - imprecisões no sinal entrada;
 - ruídos de interferências de diversas naturezas;
 - efeito de quantização dos sinais, etc.

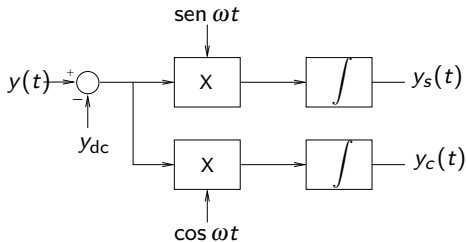
Análise do resultado experimental



Sinais senoidais com ruído.

Fazer medidas de amplitudes e defasagens entre sinais nestas condições é muito difícil, e as medidas não iriam apresentar a precisão desejada.

Tratamento numérico de sinais senoidais



Tratamento de sinal senoidal y para obtenção da amplitude e fase.

sinal de entrada: $u(t) = A_0 \text{sen}(\omega t)$

sinal de saída com ruído: $y(t) = \bar{y}(t) + e(t)$

- $\bar{y}(t) = B_0 \text{sen}(\omega t + \phi)$ é o sinal exato
- $e(t)$ é o sinal causador da imprecisão ou de ruído

Eliminação do nível DC

$$y_{dc} = \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} y(t) dt = \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} e(t) dt$$

portanto

$$y(t) - y_{dc} = B_0 \text{sen}(\omega t + \phi) + \bar{e}(t)$$

■ $\bar{e}(t)$ tem valor médio nulo.

■ Determinação da relação de amplitudes e de fase:

$$y_s\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right) = \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} [B_0 \text{sen}(\omega t + \phi) + \bar{e}(t)] \text{sen} \omega t dt$$

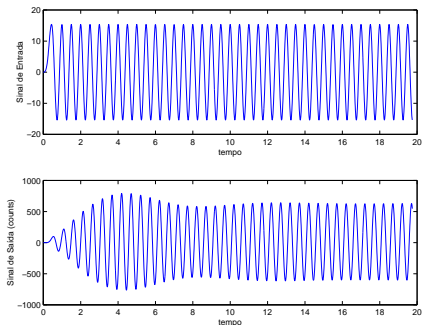
$$y_c\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right) = \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} [B_0 \text{sen}(\omega t + \phi) + \bar{e}(t)] \cos \omega t dt$$

das expressões acima obtém-se:

$$A_r = \frac{B_0}{A_0} = \frac{2\sqrt{y_s^2 + y_c^2}}{A_0}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{y_s}{y_c}\right)$$

Procedimento de cálculo I

A figura mostra um ensaio, capturado gráficamente através da opção do software da ECP no menu **Data**, opção **Export Raw Data**.



Após o transitório, o sistema entra em regime indicado pelo valor constante da amplitude de saída.

Procedimento de cálculo II

■ Análise computacional:

- 1 seleciona-se no segundo gráfico o início do regime senoidal, e um número inteiro de ciclos;
- 2 é realizado pelo do programa Matlab `manipula.m` com a seguinte entrada de dados:

■ `manipula`

```
Nome do arquivo com os dados (.txt)    :> tor_f20.txt
Frequência utilizada (em Hz)          :> 2.0
Coluna de dados com o sinal de entrada :> 3
Coluna de dados com o sinal de saída  :> 4
Nome do arquivo para guardar a
frequência (f), a fase (fi), a
relação de amplitudes (Ar),
e a amplitude do sinais de saída
(Bo) (extensão .txt) :> nosso_result.txt
```

Procedimento de cálculo III

- ✓ `tor_f2_0.txt` é o arquivo gravado com os dados do ensaio;
- ✓ as 3 linhas iniciais deste arquivo, devem estar “comentadas” para uso do Matlab (símbolo `%` no início das linhas);
- ✓ Importante: O nome do arquivo gravado deve fazer referência à frequência utilizada;
- ✓ As colunas de dados de entrada/saída são colunas do arquivo `tor_f20.txt`. Anote as colunas com a entrada e a saída.
- ✓ O arquivo `nosso_result.txt`, no exemplo, irá guardar:
frequência f , relação de amplitudes A_r , defasagem ϕ e amplitude de saída B_0
Os dados são armazenados neste arquivo de forma cumulativa.
- ✓ Os dados carregados são passados para uma função Matlab chamada `defasagem.m`, que apresenta a seguinte estrutura de chamada:
`[fi,Ar,Bo]=defasagem(A,f,ce,cs)`

- ✓ A é o nome do arquivo de dados já no workspace do Matlab,
- ✓ f, ce e cs são respectivamente, a frequência, a entrada e a saída.

Retorna

- defasagem,
- relação de amplitudes,
- amplitude de saída.

Comparação entre os resultados da identificação temporal e frequencial I

`compara.m`

- 1 Com os parâmetros conseguidos na resposta temporal, construa a função de transferência com o comando `tf`. Suponha que o nome dado seja `g1`.
- 2 se `g1` já está no workspace do Matlab, utilize o programa `compara.m` da seguinte forma:

■ `compara`

Entre com a função de transferência do sistema, ela já deve estar disponível utilizando o comando `"tf"`, verifique se o ensaio foi feito com ou sem controle. Nome da função de transferência pré-definida `:> g1`

Nome do arquivo onde estão os valores de frequência (`f`), fase (`fi`), e relação de amplitudes (`Ar`) (extensão `.txt`)
`:> nosso_result.txt`

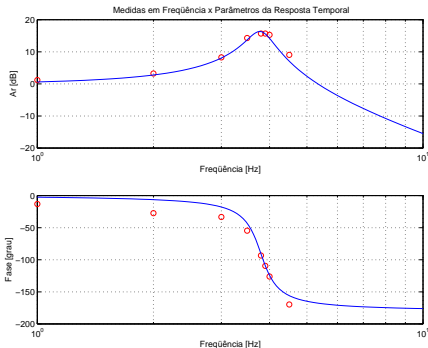
Frequências mínima e máxima para os diagramas de Bode.

Entre com `fmin` na forma `fmin=10^n1 [Hz]` `:> 0.1`

Entre com `fmax` na forma `fmin=10^n2 [Hz]` `:> 10`

Comparação entre os resultados da identificação temporal e freqüencial II

- A figura com o diagrama de Bode correspondente será criada. Se os resultados estiverem adequados, o resultado deve ser parecido com o da figura.



Resultado comparado do experimentos: resposta temporal e resposta em freqüência.

Comparação entre os resultados da identificação temporal e frequencial III

- o matlab não determina corretamente a fase de sistemas de fase não-mínima, e a rotina `compara_pendulo.m` é específica para o pêndulo que tem essa característica.