

# EA619 - Laboratório de Análise Linear

## Experiência 3: Sistemas Descritos por Equações Diferenciais Não-Lineares

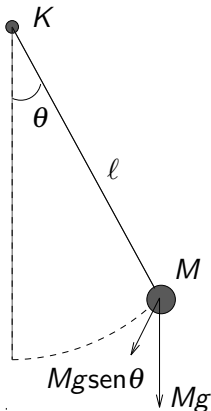
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Universidade Estadual de Campinas

1º Semestre 2016



# Objetivo

- Introdução ao estudo qualitativo de equações diferenciais não-lineares, com ênfase na análise da caracterização de equilíbrio e aproximações lineares.
- Exemplo 1: Pêndulo amortecido.



$$M\ell^2\ddot{\theta} + B\ell\dot{\theta} + Mg\ell\sin\theta = 0$$

Fazendo  $x_1(t) = \theta(t)$  e  $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -b\sin x_1(t) - ax_2(t),$$



- Exemplo 2: Problema Predador-Presa

$$\dot{x}_1(t) = ax_1(t) - cx_1(t)x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -bx_2(t) + dx_1(t)x_2(t)$$

sendo

$x_1(t)$ : população de presas (coelhos) no instante  $t$

$x_2(t)$ : população de predadores (raposas) no instante  $t$

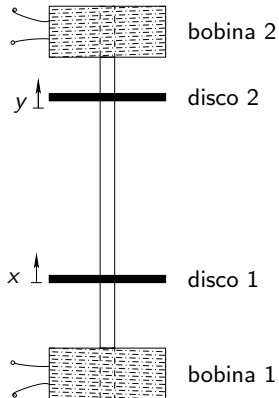
- As equações acima constituem o chamado Modelo de Volterra para interação entre espécies.
- As constantes positivas  $a, b, c$  e  $d$  dependem de fatores ambientais e das características de reprodução de predadores e presas.



# Levitador Magnético I

## ■ Exemplo 3: O Levitador Magnético

Encontra-se disponível no laboratório, e é mostrado na figura:





## Levitador Magnético II

O movimento do disco inferior (magneto #1) é descrito por:

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + F_{m12} = F_{u11} - F_{u21} - m_1 g$$

Onde

$m_1$ : massa do disco #1,

$c_1$ : coeficiente de atrito do disco #1,

$F_{u11}$ : força de interação entre a bobina #1 e o disco #1,

$F_{u21}$ : força de interação entre a bobina #2 e o disco #1,

$F_{m12}$ : força de interação entre os discos.

■ Configuração: o magneto superior está ausente, e a corrente na bobina superior é nula. Assim

$$F_{m12} \equiv F_{u21} \equiv 0$$

donde

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 = F_{u11} - mg$$

■ Da interação magnética entre o disco e a bobina #1 tem-se que

$$F_{u11} = \frac{i_1^2}{a(100y_1 + b)^4}$$



**Tabela:** Parâmetros do Levitador Magnético: Disco #1.

Parâmetro	Descrição	Valor
$m_1$	Massa do disco #1	0,118 (kg)
$c_1$	Coeficiente de atrito do disco #1	1,45 (N.s/m)
$a$	Coeficiente da força magnética $F_{u_{11}}$	$1,65 \times 10^{-4}$ (Amp/N.cm <sup>4</sup> )
$b$	Coeficiente da força magnética $F_{u_{11}}$	6,2 (cm)
$i_1$	Corrente aplicada à bobina #1	$\leq 3,0$ (A)

Fazendo  $x_1(t) = y_1(t)$  e  $x_2(t) = \dot{y}_1(t)$ ,

$$\dot{x}_1 = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -\frac{c_1}{m_1} x_2 + \frac{1}{am_1(100y_1 + b)^4} \mathbf{u} - g$$

onde  $\mathbf{u} = i_1$ .



# Pêndulo Invertido I

## ■ Exemplo 4: Pêndulo Invertido

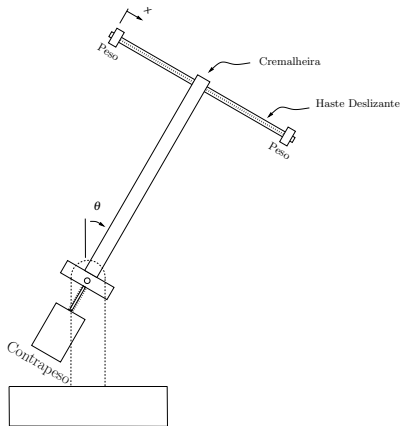




Tabela 2: Componentes do Pêndulo

Parâmetro	Descrição
$m_{w2}$	Massa do Contrapeso
$\ell_{w2}$	Distância com sinal do centro de massa do Contrapeso ao Pivot
$m_{2o}$	Massa da Haste Principal
$\ell_{co}$	Distância com sinal do centro de massa da Haste Principal ao Pivot
$m_{1o}$	Massa da Haste Deslizante
$m_{w1}$	Massa dos Pesos na Haste Deslizante
$\ell_o$	Distância com sinal da Haste Deslizante ao Pivot
$J_0^*$	Momento de Inércia do Pêndulo (sem haste deslizante e contrapeso)

- O ajuste do contrapeso permite deslocar o centro de massa do pêndulo.



## Pêndulo Invertido III

- Haste pendular principal dá suporte a uma haste deslizante.
- O movimento do pêndulo invertido é descrito pelas equações

$$\begin{aligned}\bar{J}\ddot{x} - J^*\dot{\theta}^2 - 2m_1\ell_o x\dot{\theta} + (m_2\ell_o\ell_c - \bar{J})g\sin\theta \\ + m_1\ell_o g x \cos\theta = \frac{J^*}{m_1}F \\ \bar{J}\ddot{\theta} + 2m_1x\dot{\theta} + m_1\ell_o x\dot{\theta}^2 - m_2\ell_c g\sin\theta - m_1g x \cos\theta \\ = -\ell_o F\end{aligned}$$

onde

$$m_1 = m_{1o} + m_{w1}$$

$$m_2 = m_{2o} + m_{w2}$$

$$\ell_c = (m_{w2}\ell_{w2} + m_{2o}\ell_{co})/m_2$$

$$\bar{J} = J_0^* + m_{w2}(\ell_{w2})^2$$

$$J^* = J_0^* + m_1\ell_o^2 + m_{w2}(\ell_{w2})^2$$



Definindo

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$x_3 = x$$

$$x_4 = \dot{x}$$

das equações diferenciais obtem-se a representação na forma de estado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

com



$$\dot{x}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -\gamma(2m_1x_2x_3x_4 + m_1\ell_o x_2^2x_3 - m_2\ell_cg \sin x_1 \\ - m_1gx_3 \cos x_1 + \ell_o \mathbf{u})$$

$$\dot{x}_3 = \mathbf{f}_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \mathbf{f}_4(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \gamma \left( J^* x_2^2 x_3 + 2m_1\ell_o x_2 x_3 x_4 - m_1\ell_o g x_3 \cos \theta \right. \\ \left. - (m_1\ell_o^2 + m_2\ell_o\ell_c + J^*)g \sin x_1 + \frac{J^*}{m_1} \mathbf{u} \right)$$

$$\text{onde } \gamma := \frac{1}{J^* - m_1\ell_o^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{u} = F.$$



Sistemas descritos por equações diferenciais do tipo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

onde  $\mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^n$ : vetor de estados

■ Pontos de Equilíbrio: Diz-se que um vetor  $\mathbf{x}_e \in \mathfrak{R}^n$  é um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico autônomo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^n$$

se  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}$ .

■ Pontos de equilíbrio do pêndulo amortecido e do pêndulo invertido:  
 $(n\pi, 0)$ , onde  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

■ Pontos de equilíbrio do Modelo de Volterra:

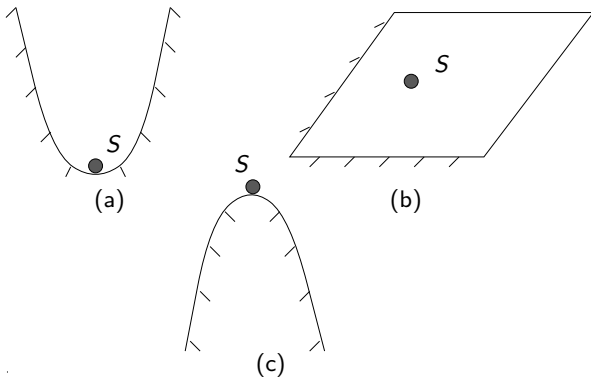
$$(0, 0) \text{ e } \left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c}\right).$$



# Noções de Estabilidade

Um ponto de equilíbrio é estável se o sistema não se afasta muito deste ponto para pequenos desvios ocorridos em determinado instante de tempo  $t_0$ .

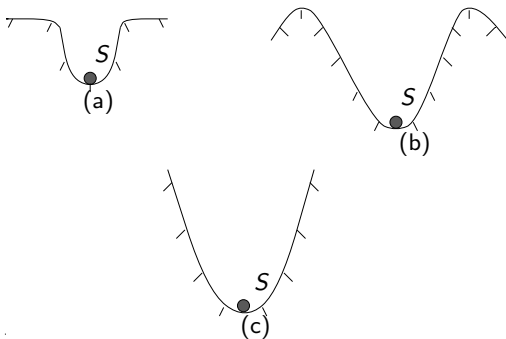
É necessário que os desvios para  $t \geq t_0$  sejam arbitrariamente pequenos, ao se fazer com que o desvio em  $t = t_0$  seja arbitrariamente pequeno.





# Domínios de Estabilidade

- Região em torno do ponto de equilíbrio na qual os conceitos de estabilidade são válidos.



## Domínios de Estabilidade

- Observe que, para pequenos deslocamentos e na presença de atrito, obtém-se uma oscilação amortecida e a esfera retorna à sua posição de equilíbrio: o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.



# Definição de Estabilidade I

Seja  $\mathbf{x}_e$  um ponto de equilíbrio do sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^n$$

e seja ainda a norma de  $\mathbf{x}(t)$  definida como

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + \cdots + x_n^2(t)}$$

## ■ Definição de Estabilidade:

Diz-se que o ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_e$  é estável se para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| < \delta(\varepsilon) \rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$



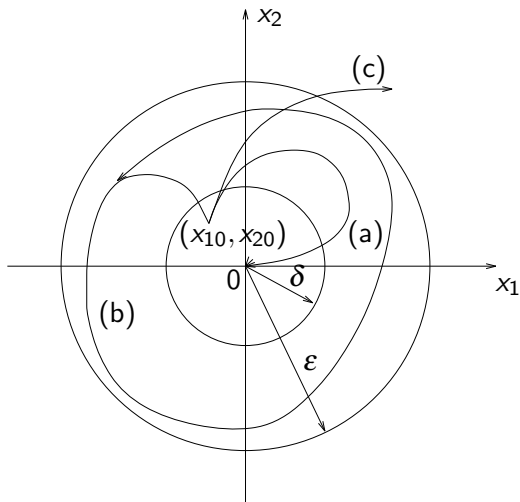
- Definição de Estabilidade Assintótica:

Diz-se que o ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_e$  é assintoticamente estável se é estável e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| \rightarrow 0$$



## Definição de Estabilidade III



(a) Assintoticamente Estável; (b) Estável; (c) Instável



## Definição de Estabilidade IV

Observe que se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| \rightarrow 0$$

então cada componente do vetor de estados tende para o seu valor de equilíbrio.

Mudança de Coordenadas

Seja  $\mathbf{x}_e$  um ponto de equilíbrio e defina

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e$$

onde  $\mathbf{x}(t)$  é solução do sistema autônomo. Então,  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  é um ponto de equilíbrio de

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t) + \mathbf{x}_e)$$



Suponha que  $\mathbf{0} = (0,0)$  é um ponto de equilíbrio do sistema autônomo de 2a. ordem

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t))$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t))$$

e que  $f_1$  e  $f_2$  são diferenciáveis numa vizinhança de  $(0,0)$ .

Através da Serie de Taylor

$$\begin{aligned} f_1(x_1(t), x_2(t)) &= f_1(0,0) + a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + r_1(x_1(t), x_2(t)) \\ &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + r_1(x_1(t), x_2(t)) \end{aligned}$$

$$f_2(x_1(t), x_2(t)) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + r_2(x_1(t), x_2(t))$$

sendo

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2$$

e  $r_1$  e  $r_2$  são os termos de ordem superior.



# Sistema Linearizado e Exemplo I

Retêm-se apenas os termos lineares da expansão em série de Taylor.

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= a_{11}z_1(t) + a_{12}z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= a_{21}z_1(t) + a_{22}z_2(t)\end{aligned}$$

Note que (0,0) também é um ponto de equilíbrio do sistema linearizado.

## ■ Exemplo: Linearização do Modelo de Volterra

Modelo Não-linear

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= ax_1(t) - cx_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -bx_2(t) + dx_1(t)x_2(t)\end{aligned}$$

Modelo Linearizado em torno de (0,0)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$



## Sistema Linearizado e Exemplo II

O ponto de equilíbrio  $(0,0)$  é instável.

Considere agora o ponto de equilíbrio  $(\frac{b}{d}, \frac{a}{c})$ . Fazendo

$$\begin{aligned}z_1(t) &= x_1(t) - \frac{b}{d} \\ z_2(t) &= x_2(t) - \frac{a}{c}\end{aligned}$$

obtem-se

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= -\frac{bc}{d}z_2(t) - cz_1(t)z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= \frac{ad}{c}z_1(t) + dz_1(t)z_2(t)\end{aligned}$$

e a linearização em torno de  $(0,0)$  resulta em

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$



## Sistema Linearizado e Exemplo III

cuja equação característica

$$\lambda^2 + ab = 0$$

tem como solução  $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{ab}$ . Esta situação representa o caso limite entre estabilidade e instabilidade.

Levando em conta que o sistema foi linearizado, a conclusão sobre a estabilidade ou instabilidade do ponto de equilíbrio depende dos termos desprezados.

Para o problema Predador-Presa, é possível determinar a equação das trajetórias.

Das equações originais, obtém-se

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2(-b + dx_1)}{x_1(a - cx_2)}$$

onde  $dx_2$  e  $dx_1$  são os diferenciais de  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente.



Separando as variáveis

$$\frac{a - cx_2}{x_2} dx_2 = \frac{-b + dx_1}{x_1} dx_1$$

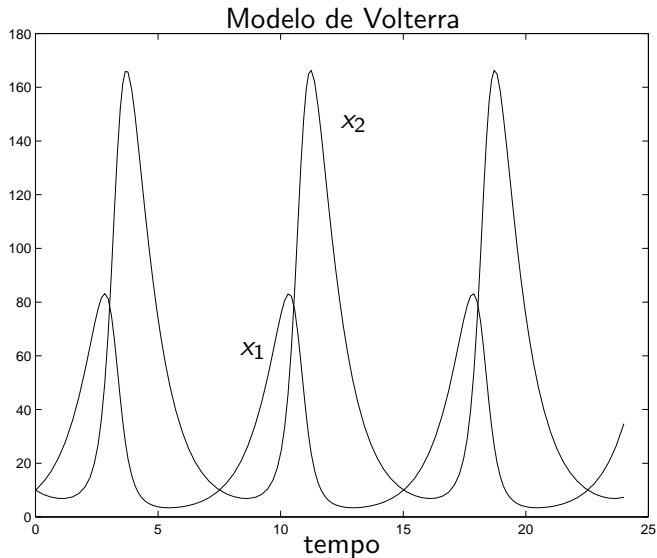
e integrando, vem

$$a \ln x_2 - cx_2 = -b \ln x_1 + dx_1 + C$$

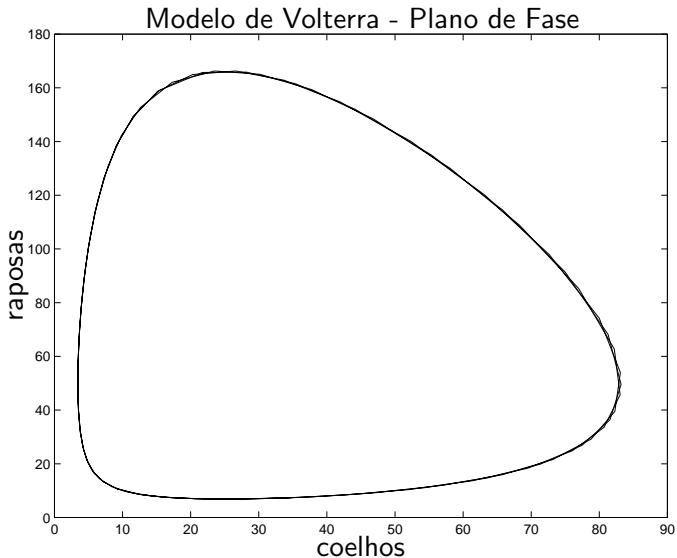
onde  $C$  é uma constante de integração.

Para  $C$  fixo, a equação anterior representa uma curva fechada — ciclo limite — que engloba o ponto de equilíbrio  $(b/d, a/c)$ .









As populações de predadores e presas têm variações cíclicas em torno deste ponto.



- Linearidade em Sinais e Sistemas, I. S. Bonatti, A. Lopes, P. L. D. Peres & C. M. Agulhari, [Capítulo 17](#).
- Análise Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaio Práticos e Exercícios, J. C. Geromel, A. G. B. Palhares, Ed. Edgar Blücher, 2004.
- Nonlinear Systems Analysis, M. **Vidyasagar**, Prentice-Hall, 1978.
- Engenharia de Controle Moderno, K. **Ogata**, Prentice-Hall do Brasil. Capítulo 3 (Modelagem matemática de sistemas dinâmicos)