

EA619 - Laboratório de Análise Linear

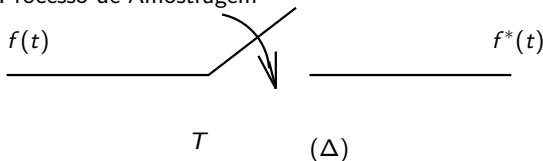
Experiência 6: Amostragem de Sinais Contínuos

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2º Semestre 2016

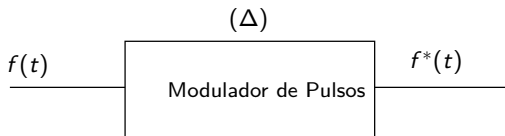
Objetivos

- Apresentar a descrição matemática do processo de amostragem de um sinal contínuo $f(t)$.
- Estudar alguns filtros que reconstituem o sinal original a partir de uma sequência de números $\{f(kT)\}$.
- Descrição do Processo de Amostragem



- $f(t)$: sinal contínuo;
- $f^*(t)$: sinal amostrado;
- T, f_s : período e frequência de amostragem;
- $t_k = kT$: instante k de amostragem ($k = 0, 1, 2, \dots$);
- Δ : intervalo de tempo em que a chave permanece fechada.

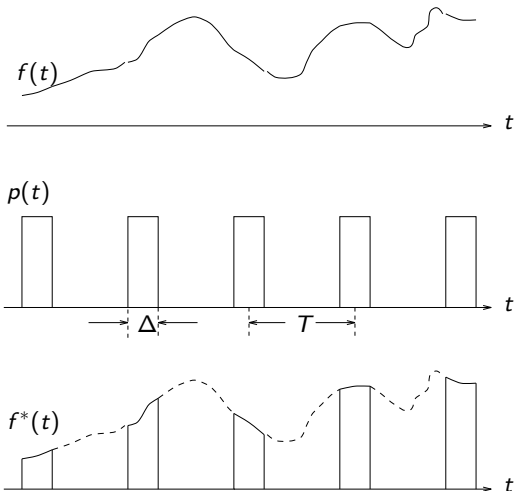
- O amostrador pode ser visto como um modulador de amplitude de pulsos.
- A saída do modulador $f^*(t)$ é igual ao produto $f(t)p(t)$, onde:
- $p(t)$ é um trem de pulsos com período T e amplitude unitária.



$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t - kT) - u(t - kT - \Delta), \quad \Delta < T$$

sendo que $u(t)$ é a função degrau unitário.

Objetivos



Amostragem do sinal f utilizando trem de pulsos p .

- Considere $f_1(t)$ e $f_2(t)$ duas funções contínuas da variável real t . A integral

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

representada como

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

define a convolução entre as duas funções.

Seja $F(\omega)$ a Transformada de Fourier de $f(t)$, e considere a notação

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

- Propriedade 1: Convolução no domínio do tempo: se

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega) \quad ; \quad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$$

então

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)$$

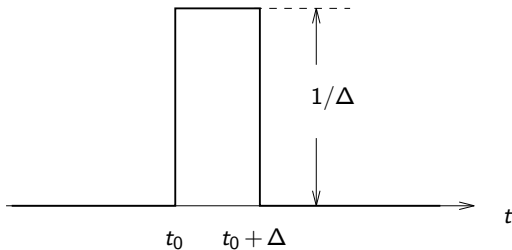
- Propriedade 2: Convolução no domínio da frequência: se

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega) \quad ; \quad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$$

então

$$f_1(t)f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)]$$

Função Pulso



$$\delta_{\Delta}(t - t_0) = \begin{cases} 0 & , \quad t < t_0 \\ 1/\Delta & , \quad t_0 \leq t < t_0 + \Delta \\ 0 & , \quad t \geq t_0 + \Delta \end{cases}$$

$$\delta(t - t_0) \triangleq \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t - t_0)$$

■ Propriedades da Função Impulso

Para a função impulso, vale a propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} \delta(t - t_0) dt = 1$$

e se $f(t)$ é contínua

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

Transformada de Fourier da função impulso:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt = 1$$

Se $f(t)$ é uma função contínua, então

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

Observações

- A convolução de uma função contínua $f(t)$ com a função impulso $\delta(t)$ reproduz a própria função $f(t)$;
- O impulso é o elemento neutro da convolução.

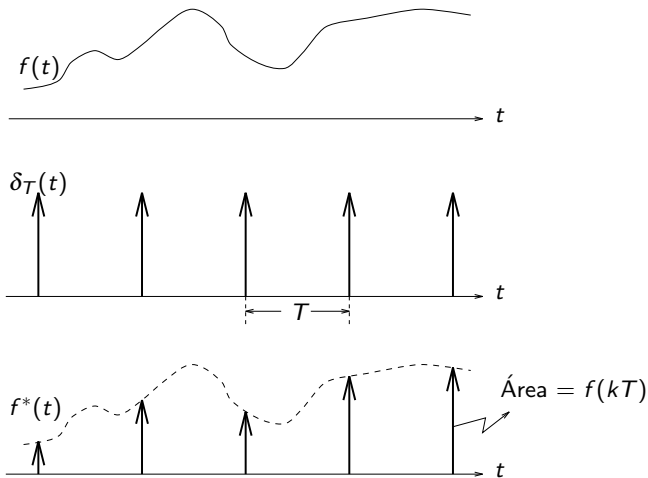
- A duração Δ da amostragem é desprezível em relação ao período de amostragem T . Neste caso, o trem de pulsos $p(t)$ é substituído por um trem de impulsos

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Se $f(t)$ é contínua

$$f(kT) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - kT) dt$$

Amostrador Ideal II



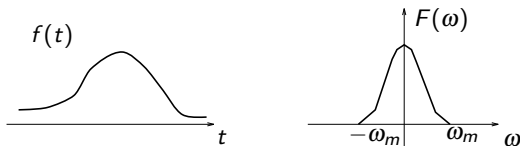
Teorema da Amostragem I

- Uma função contínua $f(t)$ com transformada de Fourier $F(\omega)$, tal que $F(\omega) = 0$ para $|\omega| \geq \omega_m$, é unicamente determinada por seus valores em intervalos uniformes de tempo T tais que

$$T \leq \frac{1}{2f_m} \quad ; \quad f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$$

- Esboço da prova:

Seja $F(\omega)$ tal que $F(\omega) = 0$, para $|\omega| \geq \omega_m$



Suponha que $f(t)$ é amostrada idealmente a cada T segundos e defina $\omega_s = 2\pi/T$. Então,

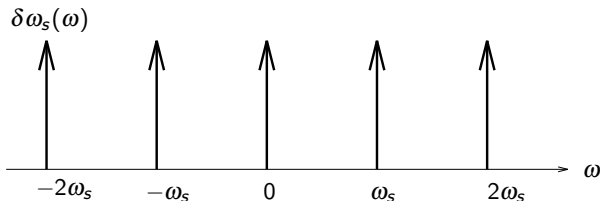
Teorema da Amostragem II

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \omega_s \delta \omega_s(\omega)$$

sendo que

$$\delta \omega_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_s n)$$

Note que $\delta \omega_s$ é um trem de impulsos com período ω_s



Seja $f^*(t) = f(t)\delta_T(t)$. Pela Propriedade 2 da convolução

$$f^*(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F(\omega) * \omega_s \delta \omega_s(\omega)] = F_s(\omega)$$

Teorema da Amostragem III

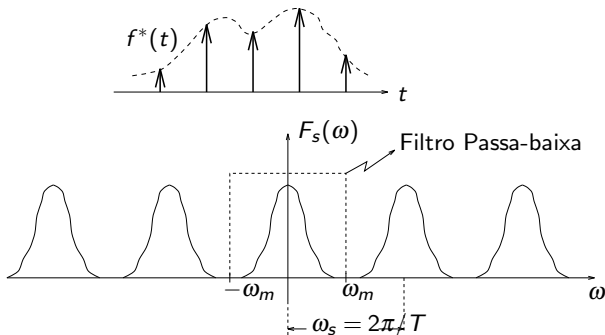
Desenvolvendo

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} \left[F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s)$$

e portanto

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$

Teorema da Amostragem IV



$f^*(t)$ e sua Transformada de Fourier $F_s(\omega)$

Note que a função $F(\omega)$ se repete periodicamente a cada ω_s rad/s, e que a repetição se dá sem sobreposição se

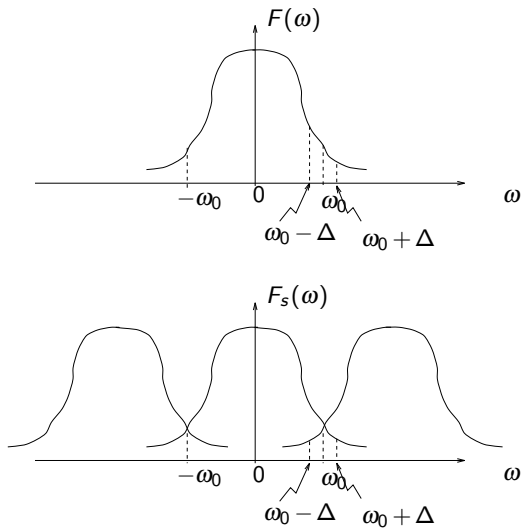
$$\omega_s \geq 2\omega_m \quad \text{ou seja,} \quad T \leq \frac{1}{2f_m}$$

■ Conclusão

Se a função $f(t)$ é amostrada com período $T \leq 1/2f_m$, o espectro $F(\omega)$ pode ser recuperado a partir de $F_s(\omega)$, usando-se um filtro passa-baixa.

- Sinais de banda limitada não existem na prática;
- Se $F(\omega) = 0$ para $|\omega| \geq \omega_m$, $f(t)$ existe $\forall t \in (-\infty, +\infty)$;
- Superposição de espectros sempre ocorre, mas em geral, existe ω_0 tal que $|F(\omega)|$ é desprezível para $|\omega| \geq \omega_0$. Suponha $\omega_s = 2\omega_0$.

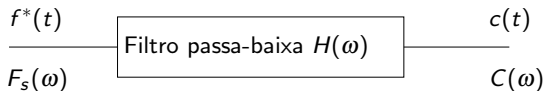
Sinais de Banda Ilimitada II



Observações

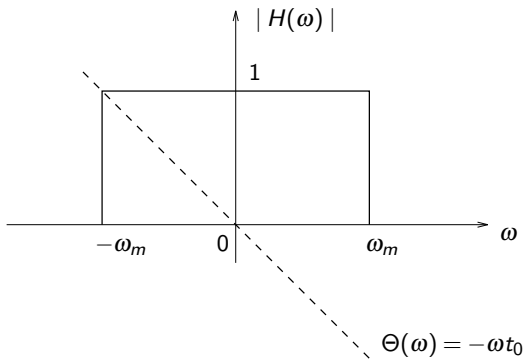
- A superposição de espectros de fato ocorre;
- O sinal recuperado através de um filtro passa-baixa incorpora frequências originalmente fora da banda limitada por ω_0 ;
- A componente de frequência $\omega_0 + \Delta$ aparece como uma componente de frequência $\omega_0 - \Delta$;
- Uma pré-filtragem pode eliminar as contribuições em ω tais que $|\omega| > \omega_0$.

- Deseja-se determinar um filtro ideal com frequência de corte ω_m .



$$H(\omega) = |H(\omega)| \exp(-j\omega t_0)$$

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| \leq \omega_m \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$



Como

$$C(\omega) = H(\omega)F_s(\omega)$$

obtém-se

$$C(\omega) = F_s(\omega)\exp(-j\omega t_0)$$

Seja $h(t)$ a resposta ao impulso do filtro passa-baixa $H(\omega)$. Pode-se mostrar que

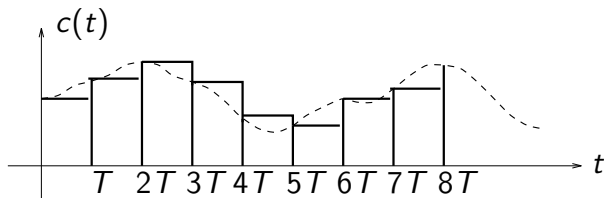
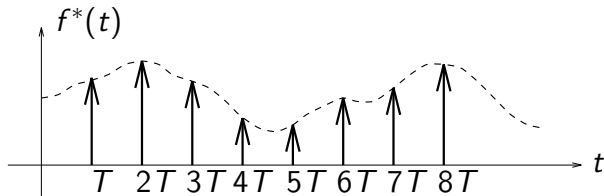
$$h(t) = \frac{\omega_m}{\pi} \left[\frac{\sin[\omega(t - t_0)]}{\omega(t - t_0)} \right]$$

Na prática, pode-se construir apenas filtros com características aproximadas das do filtro ideal.

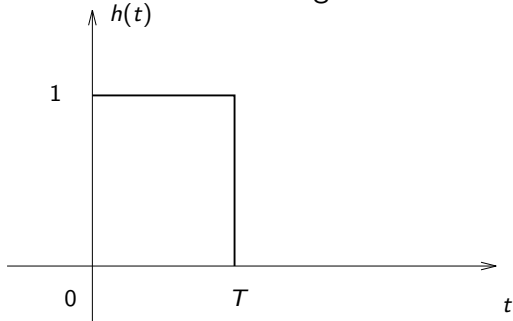
Segurador de Ordem Zero - SOZ I

- Dispositivo que mantém o sinal constante no intervalo de duração T , ou seja,

$$f_k(t) = f(kT) \quad , \quad kT \leq t \leq (k+1)T$$



Sinais de entrada e saída do segurador de ordem zero



Resposta ao impulso do SOZ

A resposta ao impulso do segurador de ordem zero é dada por

$$h(t) = u(t) - u(t - T)$$

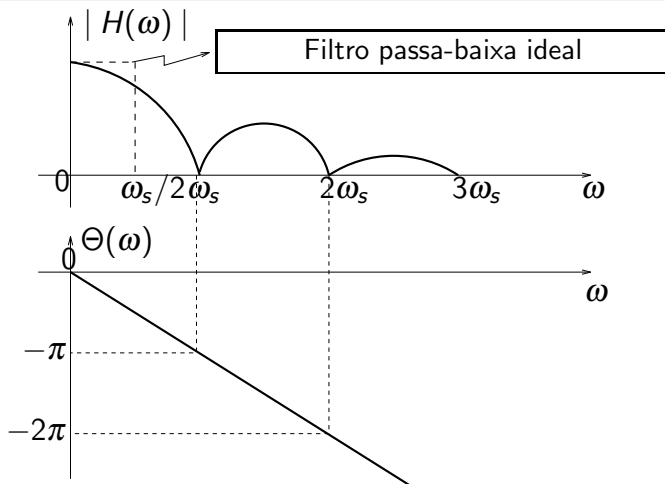
sendo que $u(t)$ é a função degrau unitário. A Transformada de Fourier de $h(t)$ é

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1 - \exp(-j\omega T)}{j\omega} = \exp(-j\omega T/2) \left(\frac{\exp(j\omega T/2) - \exp(-j\omega T/2)}{j\omega} \right) \\ &= \frac{T \operatorname{sen}(\omega T/2)}{(\omega T/2)} \exp(-j\omega T/2) \end{aligned}$$

Com $T = 2\pi/\omega_s$,

$$H(\omega) = \frac{2\pi}{\omega_s} \left[\frac{\operatorname{sen}(\pi\omega/\omega_s)}{(\pi\omega/\omega_s)} \right] \exp(-j\pi\omega/\omega_s)$$

Segurador de Ordem Zero - SOZ IV

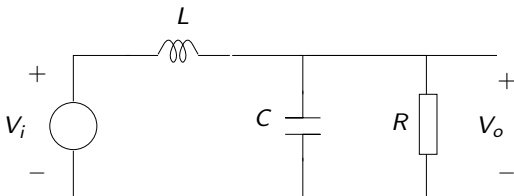


Amplitude e fase do segurador de ordem zero.

Observações

- Note que o segurador de ordem zero comporta-se essencialmente como um filtro passa-baixa;
- A eficiência do SOZ depende bastante da frequência de amostragem.

Filtro Passa-Baixa RLC (2a. Ordem) I



Função de Transferência

$$H(\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 LC + j\omega L/R + 1} = \frac{1/LC}{-\omega^2 + j\omega/RC + 1/LC}$$

Na forma padrão,

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad \xi = \frac{1}{2R} \sqrt{L/C}$$

Fazendo $R = \sqrt{L/C}$, obtém-se

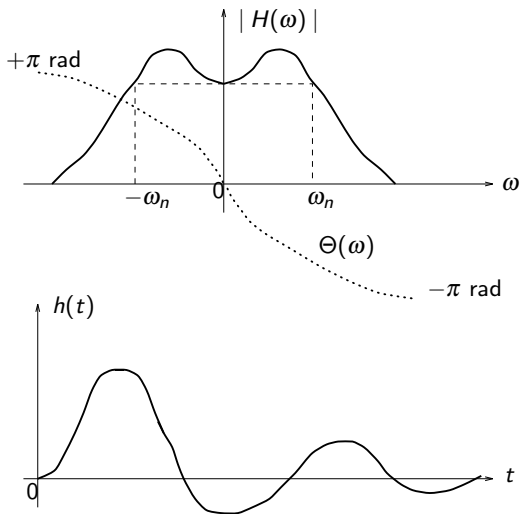
$$\xi = 1/2 \quad ; \quad \left| H(\omega) \right|_{\omega = \omega_n} = 1$$

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j\omega\omega_n + \omega_n^2}$$

Resposta ao impulso

$$h(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \omega_n \exp(-\omega_n t/2) \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_n t \right)$$

Filtro Passa-Baixa RLC (2a. Ordem) III



Características e resposta impulsiva do filtro RLC .

Note que a resposta ao impulso é semelhante à do filtro ideal, porém inicia-se em $t = 0$.

Sistemas ECP com Entrada de Sinais Amostrados

Objetivos

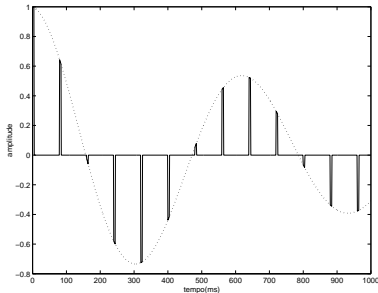
- Ilustrar a validade do teorema da amostragem usando os sistemas ECP
- Procedimento: filtrar um sinal amostrado através de um sistema mecânico ECP
- Ajuste da dinâmica do sistema mecânico para aproximá-lo de um filtro ideal.

Fundamentos

- Um sistema de 2ª ordem com $\zeta = 1/2$ se comporta como um filtro passa-baixas com frequência de corte próxima à frequência natural do sistema ω_n .
- Os sistemas ECP podem ser configurados como filtro passa-baixas (FPB), com a ajuda de controladores do tipo PD.

Procedimento

- Gera-se um sinal com composição espectral limitada em frequência.
- O sinal é então amostrado numa certa taxa de amostragem e armazenado num arquivo “funX.trj”



Exemplo típico de sinal amostrado “funX.trj”.

- O sinal amostrado é utilizado como referência para os sistemas ECP, e uma filtragem será realizada pelos sistemas mecânicos ECP configurados como sistemas de segunda ordem, visando recuperar o sinal original.

- É possível recuperar o sinal original a partir das amostras?
- Se a resposta anterior é positiva, como podemos realizar a recuperação?

■ Teorema da Amostragem

- Estabelece condições para que o sinal possa ser amostrado sem que haja perda de informação.
- De acordo com os resultados teóricos na experiência anterior, isto ocorrerá somente se duas condições se verificarem:

- ◇ O sinal original for amostrado numa frequência f_s superior ao dobro do limitante superior de seu conteúdo espectral f_0 , ou seja,

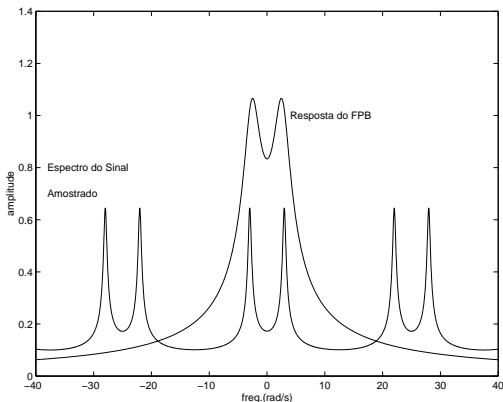
$$f_s > 2f_0$$

- ◇ O sinal amostrado for filtrado por um FPB cuja frequência de corte f_n obedeça os limites

$$f_0 < f_n < f_s - f_0$$

Exemplo

Sinal amostrado e adequadamente recuperado por um FPB de 2ª ordem é (exercício B-1-a da experiência 9).



Espectro de um sinal amostrado e a resposta de um FPB de 2ª ordem.

Exemplo de Procedimento: Retilíneo I

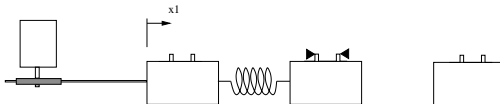


Diagrama do sistema retilíneo com o carro 2 travado.

- A função de transferência é dada por:

$$F(s) = \frac{k_{hw}}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1}$$

onde:

m_1 : é a massa do carro;

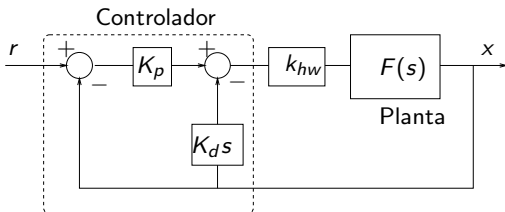
c_1 : é o coeficiente de atrito viscoso do carro;

k_1 : é a constante da mola;

k_{hw} : é o ganho de hardware do sistema.

Exemplo de Procedimento: Retilíneo II

- Considere esse sistema controlado por um controlador PD com “velocity feedback”:



- A função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{k_{hw}k_p}{m_1s^2 + (c_1 + k_{hw}k_d)s + (k_1 + k_{hw}k_p)}$$

- Deve-se calcular os parâmetros k_p e k_d de modo que:
 - ① o coeficiente de amortecimento $\zeta = 1/2$

Exemplo de Procedimento: Retilíneo III

- 2 a frequência natural de oscilação ω_n seja igual à frequência de corte desejada para o filtro

- Para que isto aconteça deve-se fazer:

$$k_p = \frac{m_1 \omega_n^2 - k_1}{k_{hw}} \quad (1)$$

e

$$k_d = \frac{m_1 \omega_n - c_1}{k_{hw}} \quad (2)$$

- Sinais e Sistemas Lineares, B. P. **Lathi**, Bookman. Capítulo 8 (Amostragem).
- Linearidade em Sinais e Sistemas, I. S. Bonatti, A. Lopes, P. L. D. Peres & C. M. Agulhari, [Capítulo 11](#).
- Digital Control Systems, B. C. **Kuo**, Oxford.