

Experiência 3:

Sistemas Descritos por Equações Diferenciais Não-Lineares

30 de Outubro de 2015

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Considerações Gerais	2
2.1	Exemplos	3
2.1.1	Pêndulo Simples	3
2.1.2	Problema Predador-Presa	3
2.1.3	Levitador Magnético	4
2.1.4	Pêndulo Invertido	5
3	Sistemas Autônomos e Pontos de Equilíbrio	7
4	Sistemas de 2ª. Ordem Autônomos: Plano de Estado/Fase	8
5	Algumas Noções de Estabilidade	8
6	Linearização	10
7	Solução Periódica e Ciclo Limite	12
7.1	Pêndulo Simples	13
7.2	Problema Predador-Presa	14
	Roteiro	16

1 Introdução

Sistemas dinâmicos lineares são aqueles descritos por equações diferenciais (ou a diferenças) lineares. O termo *linear* refere-se à aplicabilidade do *Princípio da Superposição*, isto é, se o sinal de entrada $u_1(t)$ produz como solução $y_1(t)$ e se o sinal de entrada $u_2(t)$ produz como solução $y_2(t)$, então o sinal de entrada $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ produzirá a solução $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$, quaisquer que sejam os sinais $u_1(t)$ e $u_2(t)$ e os reais α e β . A análise e a síntese de sistemas lineares são extremamente facilitadas devido a existência de soluções analíticas para equações diferenciais (ou a diferenças) lineares.

Entretanto, sistemas reais são em geral não-lineares, com comportamento mais complexo que o exibido pelos sistemas lineares. Sistemas não-lineares são representados por equações diferenciais (ou a diferenças) não-lineares e não satisfazem o Princípio da Superposição. Quase sempre estas equações não possuem soluções analíticas e frequentemente é possível obter apenas estimativas ou soluções aproximadas das verdadeiras soluções.

Nesta experiência apresenta-se uma introdução ao estudo qualitativo de equações diferenciais não-lineares, com ênfase na análise de características importantes das equações de 2ª ordem.

2 Considerações Gerais

Um modelo matemático que descreve diversos sistemas não-lineares é a equação não-linear de 2ª ordem, genericamente representada como

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = f(y(t), \dot{y}(t), u(t)), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

sendo que t é o parâmetro tempo, $u(t)$ é a função de entrada e $y(t)$ é a solução da equação ou função de saída. Definindo

$$x_1(t) = y(t) \quad (2)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t), \quad (3)$$

a equação de 2ª ordem (1) pode ser expressa como um sistema de duas equações de 1ª ordem:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (4)$$

$$\dot{x}_2(t) = f(x_1(t), x_2(t), u(t)), \quad (5)$$

Definindo os vetores $((\cdot)^T$ significa *transposto de* $(\cdot)$)

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{f}(x(t), u(t)) = [x_2(t) \ f(x_1(t), x_2(t), u(t))]^T, \quad (7)$$

obtém-se a seguinte equação diferencial vetorial

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)), \quad t \geq 0 \quad (8)$$

As variáveis $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são chamadas *variáveis de estado* e o vetor $\mathbf{x}(t)$, constitui o vetor de estados do sistema.

A equação vetorial (8) pode ser generalizada da seguinte maneira:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad t \geq 0 \quad (9)$$

onde $\mathbf{f}(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)]$ e

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

Note que a generalização (10) permite que cada variável de estado $x_i(t)$ seja função do vetor de variáveis de estado $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ e de um vetor de funções de entrada $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$.

Este tipo de representação será utilizada na sequência, no tratamento de sistemas não-lineares, para obtenção do equivalente linearizado. Os estados podem estar associados diretamente a saída $y(t)$ e suas derivadas, e neste caso cada elemento do vetor $\mathbf{x}(t)$ tem interpretação física como posição, velocidade, etc.

2.1 Exemplos

2.1.1 Pêndulo Simples

Considere o movimento de um pêndulo sujeito a atrito, mostrado na Figura 1. Seja M a massa da esfera, ℓ o comprimento do fio, g a aceleração da gravidade e B o coeficiente de atrito. A equação que descreve o movimento do pêndulo é

$$M\ell^2\ddot{\theta} + B\ell\dot{\theta} + Mg\ell\sin\theta = 0 \quad (11)$$

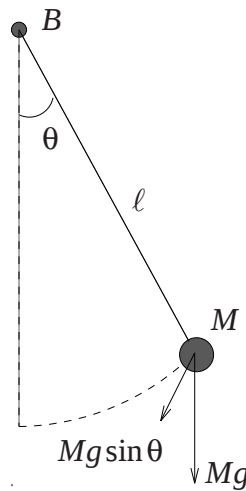


Figura 1: Pêndulo sujeito a atrito.

e fazendo $x_1(t) = \theta(t)$ e $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$, obtém-se então de (11),

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (12)$$

$$\dot{x}_2(t) = -b \sin x_1(t) - ax_2(t), \quad (13)$$

com $b = g/\ell$ e $a = B/(\ell M)$.

2.1.2 Problema Predador-Presa

Numa determinada região e num dado instante de tempo t existe uma população $x_1(t)$ de *coelhos* (presas) que se alimenta da vegetação e uma população $x_2(t)$ de *raposas* (predadores) que se alimenta de coelhos. No intervalo de tempo Δt , a população de coelhos sofre um acréscimo na forma $ax_1(t)\Delta t$, $a > 0$, devido a nascimentos e mortes naturais, e um decréscimo da forma $-cx_1(t)x_2(t)\Delta t$, $c > 0$, devido a mortes provocadas por raposas, proporcional ao número de encontros entre coelhos e raposas. A variação $\Delta x_1(t)$ da população de coelhos é então dada por

$$\Delta x_1(t) = ax_1(t)\Delta t - cx_1(t)x_2(t)\Delta t \quad (14)$$

e no limite quando $\Delta t \rightarrow 0$, obtém-se

$$\dot{x}_1(t) = ax_1(t) - cx_1(t)x_2(t) \quad (15)$$

Assuma que na ausência de coelhos, a população de raposas é decrescente e que o crescimento do número de raposas é proporcional ao número de encontros com coelhos. A evolução temporal da população de raposas pode então ser descrita analogamente por

$$\dot{x}_2(t) = -bx_2(t) + dx_1(t)x_2(t) \quad (16)$$

com $b > 0$ e $d > 0$. As equações (15) e (16) constituem o chamado *Modelo de Volterra* para interação entre espécies. As constantes a, b, c e d dependem de fatores ambientais e das características de reprodução de predadores e presas. A não-linearidade do modelo vem do produto $x_1(t)x_2(t)$.

2.1.3 Levitador Magnético

O levitador magnético com dois ímãs permanentes e duas bobinas que se encontra disponível no laboratório é mostrado esquematicamente na Figura 2.

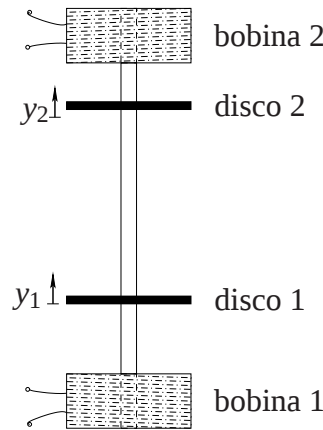


Figura 2: Levitador Magnético

O sistema é composto de duas bobinas que ao serem submetidas a correntes elétricas, criam campos magnéticos que vão interagir com os campos dos respectivos discos magnéticos permanentes. Surgem assim forças mecânicas aplicadas sobre estes magnetos, que irão movimentá-los de acordo com a corrente elétrica que atravessa cada bobina. O sentido da corrente em cada bobina, bem como a polaridade de cada magneto são estabelecidos de forma a criar uma força mecânica resultante sobre cada disco magneto que seja:

- a) Repulsiva para o magneto inferior acionada pela bobina inferior,
- b) Atrativa para o magneto superior acionado pela bobina superior.

Considere o movimento do disco magnético inferior (magneto #1). Seja m_1 a massa do disco, c_1 o coeficiente de atrito e g a aceleração da gravidade. A equação que descreve o movimento do disco é:

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + F_{m_{12}} = F_{u_{11}} - F_{u_{21}} - mg \quad (17)$$

sendo

- $F_{u_{11}}$: força de interação magnética entre a bobina #1 e o disco #1,
- $F_{u_{21}}$: força de interação magnética entre a bobina #2 e o disco #1,
- $F_{m_{12}}$: força de interação magnética entre os discos.

Por simplicidade iremos considerar que o magneto superior na Figura 2 está ausente, e a corrente na bobina superior é nula, aplicando-se corrente somente na bobina inferior (bobina #1). Nessa situação tem-se que

$$F_{m_{12}} \equiv F_{u_{21}} \equiv 0 \quad (18)$$

e da equação (17) tem-se

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 = F_{u_{11}} - m_1 g \quad (19)$$

Da natureza da interação magnética entre o disco e a bobina #1 tem-se a seguinte relação que expressa a força em função da corrente

$$F_{u_{11}} = \frac{i_1}{a(100y_1 + b)^4} \quad (20)$$

Os parâmetros envolvidos no modelo são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros do Levitador Magnético: Disco #1.

Parâmetro	Descrição	Valor
m_1	Massa do disco #1	0,118 (kg)
c_1	Coeficiente de atrito do disco #1	1,45 (N.s/m)
a	Coeficiente da força magnética $F_{u_{11}}$	$1,65 \times 10^{-4}$ (Amp/N.cm ⁴)
b	Coeficiente da força magnética $F_{u_{11}}$	6,2 (cm)
i_1	Corrente aplicada à bobina #1	$\leq 3,0$ (A)

A equação diferencial vetorial em (8) que estabelece a representação de estados, pode ser obtida escolhendo-se as variáveis do vetor como

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= \dot{y}_1 \end{aligned}$$

e a representação de estado será dada na forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -\frac{c_1}{m_1} x_2 + \frac{1}{am_1(100y_1 + b)^4} \mathbf{u} - g \end{aligned}$$

onde $\mathbf{u} = i_1$. A não-linearidade do modelo é devida ao termo proporcional à inversa da quarta potência de y_1 .

2.1.4 Pêndulo Invertido

O pêndulo invertido com contrapeso que se encontra disponível no laboratório é esquematizado na Figura 3.

O sistema consiste de uma haste pendular principal que oscila livremente, e que dá suporte a uma haste deslizante. A haste deslizante é acionada por um sistema de correia e polia. O ajuste do contrapeso permite deslocar o centro de massa do pêndulo, eventualmente localizando-o abaixo do pivot do pêndulo. Quando o centro de massa está localizado acima do pivot a haste deslizante deve ser acionada de forma a manter o equilíbrio do sistema.

Os componentes do pêndulo com as grandezas físicas associadas estão descritos na Tabela 2. O movimento do pêndulo invertido é descrito pelas equações

$$\bar{J}\ddot{x} - J^*\dot{x}\dot{\theta}^2 - 2m_1\ell_o x\ddot{\theta} + (m_2\ell_o\ell_c - \bar{J})g\sin\theta + m_1\ell_o g x \cos\theta = \frac{J^*}{m_1}F \quad (21)$$

$$\bar{J}\ddot{\theta} + 2m_1x\dot{x}\dot{\theta} + m_1\ell_o x\dot{\theta}^2 - m_2\ell_c g \sin\theta - m_1g x \cos\theta = -\ell_o F \quad (22)$$

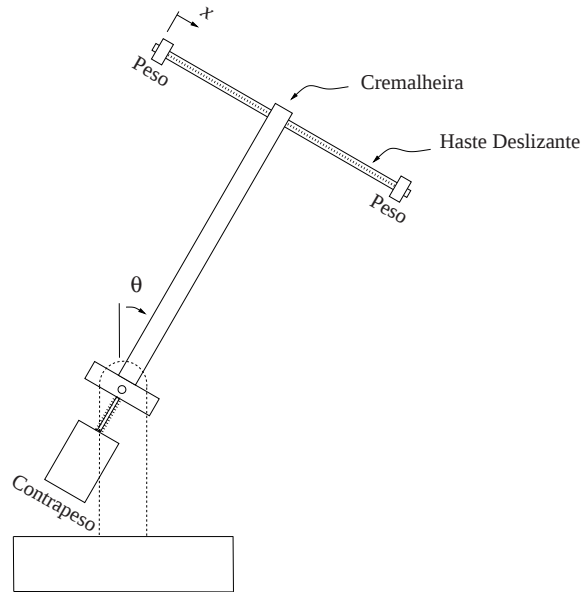


Figura 3: Pêndulo Invertido

Tabela 2: Componentes do Pêndulo

Parâmetro	Descrição	Valor
m_{w2}	Massa do Contrapeso	1 (kg)
ℓ_{w2}	Distância com sinal do centro de massa do Contrapeso ao Pivot	Ajustável: -10,5 a -14 (cm)
m_{2o}	Massa da Haste Principal	0,785 (kg)
ℓ_{co}	Distância com sinal do centro de massa da Haste Principal ao Pivot	0,071 (m)
m_{1o}	Massa da Haste Deslizante	0,103 (kg)
m_{w1}	Massa dos Pesos na Haste Deslizante	0,131 (kg)
ℓ_o	Distância com sinal da Haste Deslizante ao Pivot	0,330 (m)
J_0^*	Momento de Inércia do Pêndulo (sem haste deslizante e contrapeso)	0,0246 (kg-m ²)

e os parâmetros presentes nas equações (21) e (22) são expressos em termos dos parâmetros na Tabela 2 como

$$m_1 = m_{1o} + m_{w1} \quad (23)$$

$$m_2 = m_{2o} + m_{w2} \quad (24)$$

$$\ell_c = (m_{w2}\ell_{w2} + m_{2o}\ell_{co})/m_2 \quad (25)$$

$$\bar{J} = J_0^* + m_{w2}(\ell_{w2})^2 \quad (26)$$

$$J^* = J_0^* + m_1\ell_o^2 + m_{w2}(\ell_{w2})^2 \quad (27)$$

A equação diferencial vetorial em (8) pode ser obtida, escolhendo-se para as variáveis do

vetor de estado $\mathbf{x}$ as variáveis $\theta, \dot{\theta}, x$ e $\dot{x}$ em ordem arbitrária. Por exemplo, adotando-se

$$\begin{aligned}x_1 &= \theta \\x_2 &= \dot{\theta} \\x_3 &= x \\x_4 &= \dot{x}\end{aligned}$$

as equações diferenciais (21) e (22) estabelecem a representação na forma de estado $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ com

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{-1}{J} (2m_1 x_2 x_3 x_4 + m_1 \ell_o x_2^2 x_3 - m_2 \ell_c g \text{sen} x_1 - m_1 g x_3 \cos x_1 + \ell_o \mathbf{u}) \\ \dot{x}_3 &= \mathbf{f}_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_4 \\ \dot{x}_4 &= \mathbf{f}_4(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{J} \left(J^* x_2^2 x_3 + 2m_1 \ell_o x_2 x_3 x_4 - (m_2 \ell_o \ell_c - \bar{J}) g \text{sen} x_1 \right. \\ &\quad \left. - m_1 \ell_o g x_3 \cos x_1 + \frac{J^*}{m_1} \mathbf{u} \right)\end{aligned}$$

e $\mathbf{u} = F$.

3 Sistemas Autônomos e Pontos de Equilíbrio

Considere um sistema dinâmico *autônomo* descrito por um conjunto de equações diferenciais do tipo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad (28)$$

Note que para um vetor de entrada $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ dado, a equação (9) fica com a forma da equação (28).

Definição 1 (Ponto de Equilíbrio) Diz-se que um vetor $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico autônomo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad (29)$$

se $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}$.

Da Definição 1 conclui-se que se $\mathbf{x}_e$ é um ponto de equilíbrio de (29) e $\mathbf{x}(t)$ uma solução qualquer do sistema autônomo, então $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_e$ em algum instante t_0 implica que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$, $\forall t \geq t_0$. Com relação aos Exemplos 1 e 2, observe que

1. Os pontos de equilíbrio do movimento do pêndulo são dados por $(n\pi, 0)$, onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;
2. Os pontos de equilíbrio do Modelo de Volterra são $(0, 0)$ e $(\frac{b}{d}, \frac{a}{c})$.

4 Sistemas de 2ª. Ordem Autônomos: Plano de Estado/Fase

Um sistema de 2ª ordem autônomo é representado por duas equações diferenciais

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) \quad (30)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)) \quad (31)$$

O *Plano de Estado* é o plano bidimensional com eixo horizontal x_1 e eixo vertical x_2 . Suponha que $[x_1(t) \ x_2(t)]$, $t \geq 0$ é uma solução do sistema. O gráfico de $x_1(t)$ versus $x_2(t)$ para $t \geq 0$ é chamado de trajetória no plano de estado do sistema. No caso particular em que o sistema de 2ª ordem é representado pelas equações

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (32)$$

$$\dot{x}_2(t) = f(x_1(t), x_2(t)) \quad (33)$$

o plano $x_1 \times x_2$ é chamado de *Plano de Fase*. A Figura 4 mostra uma trajetória no plano de estado começando no estado (x_{10}, x_{20}) em $t = t_0$ e passando por (x_{1f}, x_{2f}) em $t = t_f$.

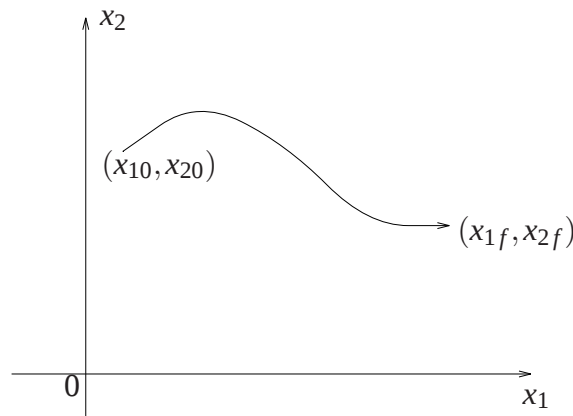


Figura 4: Trajetória no Plano de Fase.

5 Algumas Noções de Estabilidade

A teoria de controle indica que a estabilidade é uma das mais importantes propriedades de um sistema dinâmico. Considere um sistema que se encontra num ponto de equilíbrio e suponha que ocorra um desvio do sistema em relação à posição de equilíbrio, provavelmente devido a uma perturbação.

O ponto de equilíbrio é estável se o sistema não se afasta *muito* deste ponto para pequenos desvios ocorridos em determinado instante de tempo t_0 . Além disso, é necessário que os desvios para $t \geq t_0$ sejam arbitrariamente pequenos, ao se fazer com que o desvio em $t = t_0$ seja arbitrariamente pequeno. Este conceito é ilustrado por meio do movimento de uma massa esférica S sobre uma determinada superfície, quando S está sujeita apenas à ação da gravidade. As três configurações da Figura 5 mostram a esfera em diversas posições de equilíbrio.

No caso da situação (a), a massa oscilará permanentemente em torno de sua posição de equilíbrio se for deslocada desta posição e não houver atrito. A amplitude da oscilação dependerá do deslocamento inicial e pode ser feita arbitrariamente pequena se o deslocamento inicial for também arbitrariamente pequeno. Na situação (b), a massa se encontra sobre um plano

horizontal. Se a massa for deslocada, a nova posição será também um ponto de equilíbrio e a massa permanecerá nesta nova posição. Nas situações (a) e (b), os pontos de equilíbrio correspondentes são *estáveis*. O comportamento do sistema referente à situação (c) é inteiramente diferente. Por menor que seja o deslocamento realizado, a esfera S se moverá para longe do ponto de equilíbrio. Diz-se neste caso que o ponto de equilíbrio é *instável*.

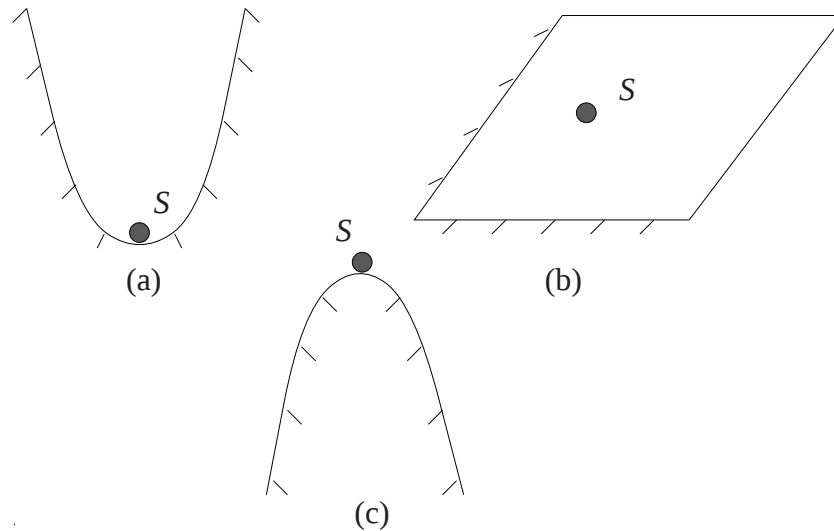


Figura 5: (a) Sistema Estável; (b) Sistema Estável; (c) Sistema Instável

Considere agora a existência de atrito. Se na situação (a) a massa sofre um pequeno deslocamento de seu ponto de equilíbrio, então obtém-se uma oscilação amortecida e a esfera retorna à sua posição de equilíbrio. Diz-se neste caso que o ponto de equilíbrio é *assintoticamente estável*. Na situação (b), a massa não retorna à sua posição de equilíbrio ao ser deslocada e, portanto, o ponto de equilíbrio não é assintoticamente estável. Em aplicações de controle de sistemas, estabilidade assintótica é quase sempre requerida.

Ao se introduzir os conceitos de estabilidade e de estabilidade assintótica, assume-se que existe uma pequena região em torno do ponto de equilíbrio na qual estes conceitos são válidos. Considere por exemplo as situações mostradas na Figura 6.

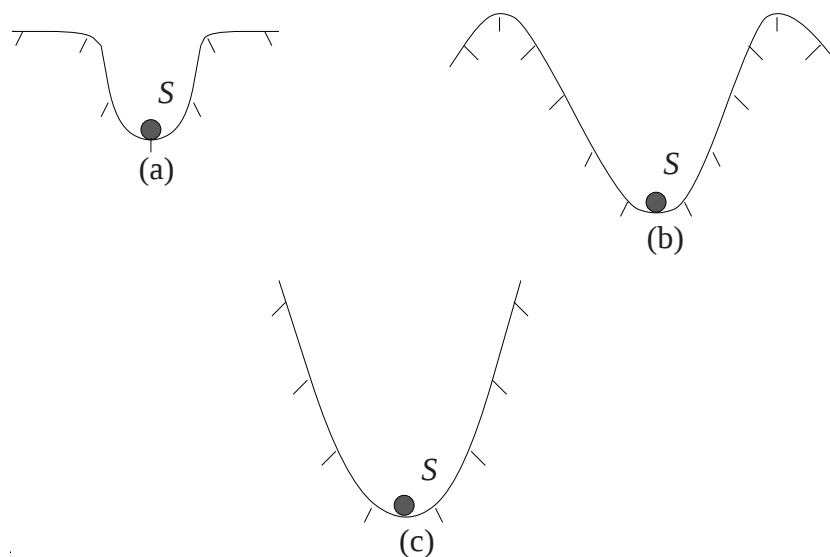


Figura 6: Domínios de Estabilidade

O ponto de equilíbrio da massa S é estável nos três casos (e assintoticamente estável, se existir atrito). No entanto, o deslocamento inicial permitido de forma a obter-se um movimento convergente para a posição de equilíbrio é muito menor na situação (a) do que na situação (b). Na situação (c), o movimento é convergente qualquer que seja o deslocamento inicial.

A discussão acima ilustra o conceito de *domínio de estabilidade*. Este conceito é fundamental em aplicações, pois não basta verificar se um ponto de equilíbrio é estável no sentido descrito anteriormente. É necessário analisar se o domínio de estabilidade é adequado às condições de operação do sistema.

Todos estes conceitos podem ser colocados matematicamente como segue. Seja $\mathbf{x}_e$ um ponto de equilíbrio do sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad (34)$$

e seja ainda a *norma* de $\mathbf{x}(t)$, para t fixo, definida como

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + \cdots + x_n^2(t)}$$

Definição 2 (Estabilidade) Diz-se que o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e$ é estável se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| < \delta(\varepsilon) \rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

Definição 3 (Estabilidade Assintótica) Diz-se que o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e$ é assintoticamente estável se é estável e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| \rightarrow 0$$

Observe que se a norma da diferença $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e$ está limitada por algum valor real ou tende a 0 quando $t \rightarrow \infty$, então o mesmo comportamento deve ser esperado de cada componente do vetor de estados. A Figura 7 ilustra os conceitos de estabilidade para $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$. Observe que sempre é possível assumir que o vetor $\mathbf{0}$ é um ponto de equilíbrio de (34) trasladando-se as coordenadas do sistema original de tal forma que o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e$ torne-se o vetor $\mathbf{0}$ no novo sistema de coordenadas. Especificamente, se $\mathbf{x}_e$ é um ponto de equilíbrio de (34), então fazendo

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e$$

onde $\mathbf{x}(t)$ é solução de (34), obtém-se então

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t) + \mathbf{x}_e) \quad (35)$$

e portanto $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ é um ponto de equilíbrio de (35).

6 Linearização

Esta seção trata da linearização de um sistema não-linear em torno de seus pontos de equilíbrio. O objetivo básico desta linearização é analisar o comportamento das trajetórias do sistema não-linear através do estudo do sistema linear resultante. Este método de análise é muito útil e é válido para uma grande classe de sistemas não-lineares.

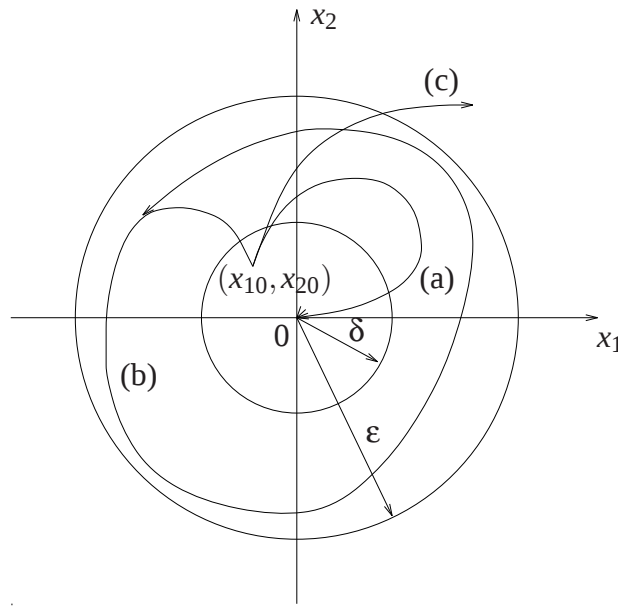


Figura 7: (a) Assintoticamente Estável; (b) Estável; (c) Instável

Seja então o sistema autônomo de 2ª ordem

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) \quad (36)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)) \quad (37)$$

Suponha que $\mathbf{0} = (0, 0)$ é um ponto de equilíbrio deste sistema e que f_1 e f_2 são diferenciáveis numa vizinhança de $(0, 0)$. Seja

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2$$

Através da Série de Taylor é possível expandir f_1 e f_2 da seguinte maneira

$$f_1(x_1(t), x_2(t)) = f_1(0, 0) + a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + r_1(x_1(t), x_2(t)) \quad (38)$$

$$= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + r_1(x_1(t), x_2(t)) \quad (39)$$

$$f_2(x_1(t), x_2(t)) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + r_2(x_1(t), x_2(t)) \quad (40)$$

onde r_1 e r_2 são os termos de ordem superior das respectivas séries de Taylor. Associado ao sistema original, define-se o seguinte sistema linearizado

$$\dot{z}_1(t) = a_{11}z_1(t) + a_{12}z_2(t) \quad (41)$$

$$\dot{z}_2(t) = a_{21}z_1(t) + a_{22}z_2(t) \quad (42)$$

Note que $(0, 0)$ também é um ponto de equilíbrio do sistema linearizado, e as variáveis z_1 e z_2 podem ser entendidas como variáveis de desvio, na forma $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e$ com $\mathbf{x}_e = (0, 0)$.

O método da linearização é baseado no fato que na maioria dos casos, as trajetórias do sistema não-linear possuem, em uma vizinhança adequada do ponto de equilíbrio, as mesmas características qualitativas das trajetórias do sistema linearizado.

7 Solução Periódica e Ciclo Limite

Alguns sistemas autônomos possuem soluções periódicas. Considere, por exemplo, o oscilador harmônico descrito pelas equações

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = x_{10} \quad (43)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t), \quad x_2(0) = x_{20} \quad (44)$$

A solução deste sistema é dada por

$$x_1(t) = \rho_0 \cos(-t + \phi_0) \quad (45)$$

$$x_2(t) = \rho_0 \sin(-t + \phi_0) \quad (46)$$

onde

$$\rho_0 = \sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2} \text{ e } \phi_0 = \arctan \frac{x_{20}}{x_{10}}$$

Note que a solução é periódica independentemente das condições iniciais. Observe também que a partir da solução obtida,

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = \rho_0^2, \quad \forall t$$

ou seja, as trajetórias no plano de estado são circunferências cujos *raios* dependem da condição inicial (x_{10}, x_{20}) . O plano de fase está inteiramente coberto por soluções periódicas no sentido de que dado um ponto arbitrário (x_1, x_2) , pode-se então encontrar uma solução periódica passando por (x_1, x_2) .

Considere agora o sistema de equações não-lineares

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + \alpha x_1(t)(\beta^2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)) \quad (47)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + \alpha x_2(t)(\beta^2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)) \quad (48)$$

Introduzindo coordenadas polares

$$\rho = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} \text{ e } \phi = \arctan \frac{x_2(t)}{x_1(t)}$$

então o sistema anterior transforma-se em

$$\dot{\rho} = \alpha \rho (\beta^2 - \rho^2) \quad (49)$$

$$\dot{\phi} = -1 \quad (50)$$

Pode-se verificar que a solução de (49)-(50) é dada por

$$\rho = \frac{\beta}{\sqrt{1 + c_0 e^{-\beta^2 t}}} \quad (51)$$

$$\phi = \phi_0 - t \quad (52)$$

onde $c_0 = (\beta^2/\rho_0^2) - 1$. Note que o sistema (49)-(50) tem somente uma solução periódica, quando $\rho_0 = \beta$. Além disso, para $\rho_0 \neq \beta$, todas as soluções aproximam-se da solução periódica, quando $t \rightarrow \infty$. Este exemplo difere do exemplo do oscilador harmônico simples, na medida que a solução periódica no presente caso é isolada, isto é, existe uma vizinhança da mesma que não contém soluções periódicas.

Definição 4 (Ciclo Limite) Um ciclo limite é qualquer solução periódica de

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) \quad (53)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)) \quad (54)$$

Soluções periódicas estão sempre associadas a trajetórias fechadas do plano de estado.

7.1 Pêndulo Simples

Estudaremos o pêndulo simples com amortecimento devido ao atrito. O movimento de um pêndulo amortecido é descrito pelas equações (12)-(13), onde $b = g/\ell$ e $a = B/(\ell M)$. Os pontos de equilíbrio de (12)-(13) são dados por $(n\pi, 0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Linearizando em torno do ponto de equilíbrio $(0, 0)$, obtém-se o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Se $x_1 = y$ então $x_2 = \dot{y}$ e portanto o sistema linear pode ser reescrito na forma

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0 \quad (55)$$

A equação característica é

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Seja $\Delta = a^2 - 4b$. A natureza das raízes da equação característica depende do valor que Δ assume (note que $a > 0$ e $b > 0$):

1. $\Delta \geq 0$: raízes reais negativas, com solução na forma

$$y(t) = k_1 \exp(\lambda_1 t) + k_2 \exp(\lambda_2 t); \quad (56)$$

2. $\Delta < 0$: raízes complexas com parte real negativa, com solução na forma

$$y(t) = \exp(\sigma t)[A \cos \omega t + B \sin \omega t] \quad (57)$$

Em qualquer dos casos o ponto de equilíbrio será assintoticamente estável. De fato, observe que $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Analogamente, é possível mostrar que os pontos de equilíbrio da forma $(n\pi, 0)$, onde n é par, são da mesma natureza de $(0, 0)$. Considere agora os pontos de equilíbrio do tipo $(n\pi, 0)$, n ímpar. Fazendo a translação

$$x_1(t) = n\pi + z_1(t) \quad (58)$$

$$x_2(t) = z_2(t) \quad (59)$$

obtém-se de (12)-(13),

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t) \quad (60)$$

$$\dot{z}_2(t) = b \sin z_1(t) - a z_2(t) \quad (61)$$

e a linearização de (12)-(13) em torno de $(0, 0)$ resulta em

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

Para este sistema $\Delta = a^2 + 4b$, o que implica que uma raiz da equação característica será positiva. Portanto, em torno dos pontos de equilíbrio do tipo $(n\pi, 0)$, n ímpar, a conclusão é que o sistema (12)-(13) é instável.

7.2 Problema Predador-Presa

O modelo matemático que descreve este problema, apresentado na Seção 2, é descrito por

$$\dot{x}_1(t) = ax_1(t) - cx_1(t)x_2(t) \quad (62)$$

$$\dot{x}_2(t) = -bx_2(t) + dx_1(t)x_2(t) \quad (63)$$

Considere o ponto de equilíbrio $(0,0)$. Linearizando em torno deste ponto, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Observe que surgem duas equações de 1ª ordem independentes:

$$\dot{x}_1(t) = ax_1(t) \quad (64)$$

$$\dot{x}_2(t) = -bx_2(t) \quad (65)$$

o que implica que a equação característica associada tem como raízes $\lambda_1 = a > 0$ e $\lambda_2 = -b < 0$. É fácil mostrar que neste caso o ponto de equilíbrio $(0,0)$ é instável.

Considere agora o ponto de equilíbrio $(\frac{b}{d}, \frac{a}{c})$. Fazendo

$$x_1(t) = \frac{b}{d} + z_1(t) \quad (66)$$

$$x_2(t) = \frac{a}{c} + z_2(t) \quad (67)$$

obtém-se

$$\dot{z}_1(t) = -\frac{bc}{d}z_2(t) - cz_1(t)z_2(t) \quad (68)$$

$$\dot{z}_2(t) = \frac{ad}{c}z_1(t) + dz_1(t)z_2(t) \quad (69)$$

e a linearização de (68)-(69) em torno de $(0,0)$ resulta em

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

A equação característica associada a este sistema tem a forma

$$\lambda^2 + ab = 0$$

que tem como solução $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{ab}$. A parte real de λ é portanto nula e representa o caso limite entre estabilidade e instabilidade. Levando em conta que o sistema foi linearizado, conclui-se que a decisão sobre a estabilidade ou instabilidade do ponto de equilíbrio depende dos termos desprezados pela linearização. Entretanto, para este problema Predador-Presa, é possível determinar a equação das trajetórias. De (62)-(63), obtém-se

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2(-b + dx_1)}{x_1(a - cx_2)}$$

onde dx_2 e dx_1 são os diferenciais de x_1 e x_2 , respectivamente. Separando as variáveis

$$\frac{a - cx_2}{x_2} dx_2 = \frac{-b + dx_1}{x_1} dx_1$$

e integrando, vem

$$a \ln x_2 - cx_2 = -b \ln x_1 + dx_1 + C \quad (70)$$

onde C é uma constante de integração. A equação (70) não pode ser resolvida explicitamente para x_1 como função de x_2 ou vice-versa. Entretanto, o matemático italiano Volterra mostrou que para um valor fixo de C , o gráfico de (70) é uma curva fechada (*ciclo limite*) que engloba o ponto de equilíbrio $(\frac{b}{d}, \frac{a}{c})$ (Figura 8). Deste modo, as populações de predadores e presas têm variações cíclicas em torno deste ponto.

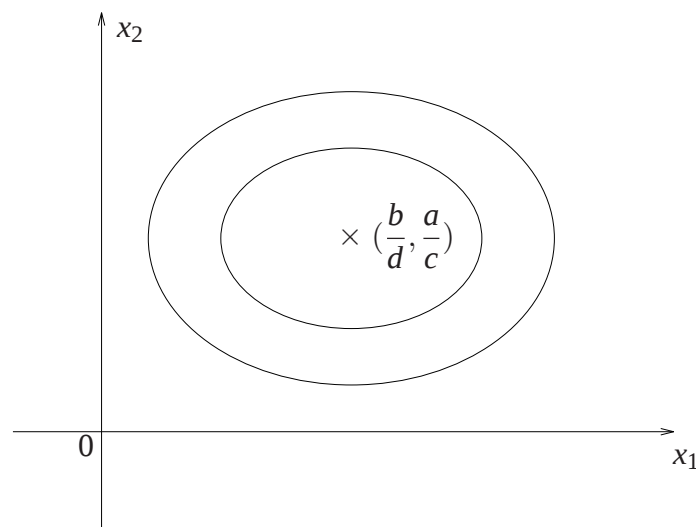


Figura 8: Análise do ponto de equilíbrio $(b/d, a/c)$

Referências

- [1] I. S. Bonatti, A. Lopes, P. L. D. Peres, and C. M. Agulhari. *Linearidade em Sinais e Sistemas*. Blucher, São Paulo, SP, 2015.
- [2] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. LTC – Livros Técnicos e Científicos, 9 edition, 2010.
- [3] J. C. Geromel and A. G. B. Palhares. *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaio Práticos e Exercícios*. Blucher, São Paulo, SP, 2004.
- [4] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

Roteiro

Nota: Os símbolos Ⓖ, Ⓓ, Ⓓ e Ⓔ indicam a necessidade de produção de um gráfico, desenvolvimento teórico, diagrama simulink e script matlab, respectivamente.

Parte A - Exercícios para o Pêndulo Simples

A1 Considere o movimento de um pêndulo não-amortecido descrito por

$$\ddot{\theta}(t) + a \sin \theta(t) = 0, \quad a = \frac{g}{\ell}$$

- (a) Mostre que os pontos de equilíbrio são $(n\pi, 0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Ⓓ;
- (b) Analise o sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio $(0, 0)$. Mostre que as trajetórias do sistema linearizado no Plano de Fase correspondem a elipses Ⓓ. Indique a direção das trajetórias elípticas;
- (c) Mostre que em torno do ponto de equilíbrio $(\pi, 0)$ o sistema é instável Ⓓ.

A2 Considere o modelo do pêndulo não-amortecido. Simule o seu comportamento não-linear para $g/\ell = 1$ Ⓓ e as seguintes condições iniciais:

	(a)	(b)	(c)	(d)
$\theta(0)$	0	0	0	π
$\dot{\theta}(0)$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{10\pi}{17}$	$-\frac{\pi^2}{5}$	0

Deverá ser produzida uma única figura com 4 gráficos (usar comando subplot) Ⓖ. Porque no caso (d) o pêndulo simulado mantém a condição inicial, mesmo sendo o ponto de equilíbrio $(\pi, 0)$ instável Ⓓ? Aumente o tempo de simulação e verifique o que ocorre.

- A3 Repita a simulação realizada em A2, itens (a) e (b), para o modelo linearizado do pêndulo em torno do ponto $(0, 0)$ Ⓓ. Compare o comportamento dos sistemas não-linear e linearizado, medindo a frequência de oscilação. Discuta a validade das linearizações. Ⓓ
- A4 Supondo agora que o pêndulo esteja sujeito a um torque externo T aplicado ao pêndulo, a equação do movimento do pêndulo passa a ser:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) = T(t)$$

Simule Ⓓ a situação quando T é uma entrada impulsiva, supondo as condições iniciais $\theta(0)$ e $\dot{\theta}(0)$ nulas, nos seguintes casos:

$$\text{a) } T_1(t) = \frac{\pi}{10} \delta(t), \text{ Ⓖ } \quad \text{b) } T_2(t) = \frac{10\pi}{17} \delta(t) \text{ Ⓖ }$$

Explique porque as respostas coincidem respectivamente, com as aquelas obtidas nos casos (a) e (b) em A2 Ⓓ.

Observação: No caso linear pode-se mostrar essa equivalência analiticamente utilizando a transformada de Laplace de uma função $x(t)$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx^n}{dt^n}\right\} = s^n \mathcal{L}\{x\} - s^{n-1}x(0) - \dots - \frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}} \Big|_{x(0)}$$

- A5 Utilizando as repostas temporais obtidas no item A4, verifique se o Princípio de Superposição¹ é válido para o pêndulo. Conclua sobre a validade ou não do Princípio de Superposição para sistemas não-lineares (t) .

Parte B - Simulação do Pêndulo Invertido

- B1 Faça a simulação do pêndulo invertido no SIMULINK/MATLAB utilizando as equações diferenciais não lineares em (21)-(22), relacionando os parâmetros nestas equações aos componentes do pêndulo por meio da Tabela 2 e das expressões (23), (24), (25), (26) e (27). Utilize $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ e tome inicialmente

$$\ell_{w2} = -14 \text{ cm}, x(0) = \dot{x}(0) = 0, F \equiv 0, \theta(0) = \frac{\pi}{8} \text{ e } \dot{\theta}(0) = 0$$

Apresente um gráfico que mostre $\theta \times t$ (g) . O ponto de equilíbrio $x_e = \dot{x}_e = \theta_e = \dot{\theta}_e = 0$ é estável com o contrapeso nessa posição? Explique. (t)

- B2 Suponha que a haste deslizante esteja centrada na haste principal do pêndulo e bloqueada, isto é $x \equiv \dot{x} \equiv 0$. Verifique por meio das expressões (21)-(22) o que ocorre com a força F nesta situação (t) . Introduza as modificações necessárias na simulação do item B-1, e proceda como indicado a seguir.

- Varie a posição inicial $\theta(0)$ na forma $t_{e0}=0.1:0.3:\pi-.5$ e observe como varia a frequência de oscilação (t apresente uma tabela),
- Varie a posição do centro de massa variando ℓ_{w2} (centro de massa do contrapeso). Com $\theta(0) = \pi/8$, utilize os valores

$$\text{b.1) } \ell_{w2} = -0.15, \text{ b.2) } \ell_{w2} = -0.30, \text{ b.3) } \ell_{w2} = -0.50 \text{ e b.4) } \ell_{w2} = -0.60$$

Meça a frequência de oscilação em cada caso simulado (t apresente uma tabela).

- Varie agora a posição do contrapeso, aproximando-o cada vez mais do pivot. Com centro de massa do contrapeso $\ell_{w2} > -0,15 \text{ m}$ observe o comportamento e determine por meio da simulação a posição ℓ_{w2} para a qual o ponto de equilíbrio $x_e = \dot{x}_e = \theta_e = \dot{\theta}_e = 0$ passa a ser instável (t informe apenas o valor encontrado de ℓ_{w2})

¹Vide o Roteiro da Experiência 2.