

**Experiência 2: Sistemas Dinâmicos Lineares: Sistemas Eletro-
mecânicos**

16 de março de 2016

Sumário

I	Sistemas Dinâmicos Lineares	1
1	Introdução	2
2	Equações Diferenciais Lineares	4
2.1	Equação Diferencial Linear de 1a. Ordem Homogênea	4
2.2	Equação Diferencial Linear de 2a. Ordem Homogênea	5
2.2.1	Raízes Reais e Distintas	5
2.2.2	Raiz Real Dupla	6
2.2.3	Raízes Complexas	6
3	Equações Lineares Não-Homogêneas	7
4	Forma Canônica da Equação de 2a. Ordem	10
II	Sistemas Eletromecânicos	11
5	Descrição dos sistemas	12
5.1	Emulador industrial	12
5.2	Sistema retilíneo	13
5.3	Sistema torcional	14
5.4	Pêndulo invertido	15
5.5	Levitador magnético	16
5.6	Aquisição de dados, atuação e interfaces	16
5.7	Mudanças de configuração	17
6	Segurança	17
	Roteiro	19

Parte I

Sistemas Dinâmicos Lineares

1 Introdução

Vários sistemas físicos e econômicos podem ser modelados matematicamente através de equações diferenciais lineares. O objetivo desta experiência é analisar algumas propriedades desta classe de sistemas dinâmicos.

Exemplo 1 - Considere um tanque para aquecimento de um fluido, mostrado na Fig. 1. O tanque contém um dispositivo de aquecimento e um agitador para assegurar que todo o fluido esteja à mesma temperatura T . Supõe-se que a vazão de entrada W é igual à vazão de saída e que a temperatura T do fluido efluente é a mesma do fluido no interior do tanque. Seja

C : Calor específico do fluido (cal/Kg. $^{\circ}$ C);

ρ : Densidade do fluido (Kg/m 3);

V : Volume do fluido (m 3);

T_e : Temperatura do fluido na entrada do tanque ($^{\circ}$ C);

Q : Quantidade de calor fornecida (cal);

T : Temperatura do fluido no tanque e na saída do tanque ($^{\circ}$ C);

W : Vazão de entrada e de saída (kg/min);

t : Variável tempo (min).

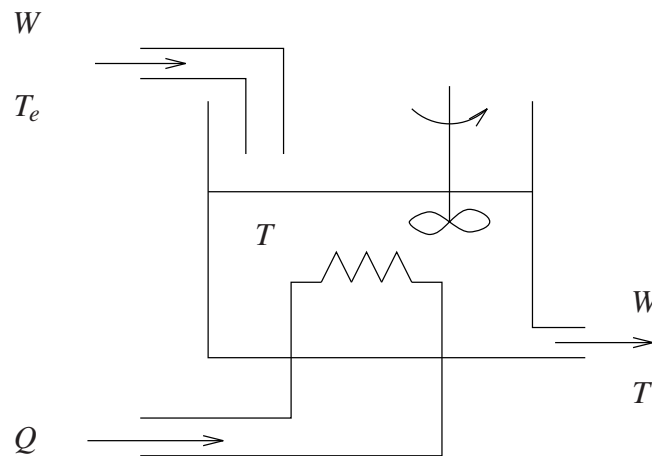


Figura 1: Sistema Térmico de 1a. Ordem

O modelamento deste tipo de sistema é feito pelas equações de balanço de massa e de energia. Para o caso em análise, como os fluxos de entrada e de saída são iguais, o balanço de massa não introduz nenhuma equação de interesse. Entretanto, o balanço de energia fornece

$$\rho V C \frac{d}{dt} T(t) = W C T_e + \frac{d}{dt} Q(t) - W C T(t) \quad (1)$$

ou, rearranjando e introduzindo a notação $\dot{T} \triangleq \frac{d}{dt} T(t)$; $\dot{Q} \triangleq \frac{d}{dt} Q(t)$, vem

$$\dot{T} + \frac{W}{\rho V} T = \frac{W}{\rho V} T_e + \frac{1}{\rho V C} \dot{Q} \quad (2)$$

Diz-se que a equação diferencial (2) que descreve o processo é *linear* de 1a. ordem. As funções do tempo $T_e(t)$ e $Q(t)$ são chamadas de *funções de entrada*. É importante ainda especificar o valor da temperatura no instante a partir do qual o seu comportamento será analisado (por exemplo $T(0)$), isto é, a *condição inicial* do sistema.

Exemplo 2 - Considere os sistemas mecânico e elétrico da Fig. 2. Para o sistema mecânico, seja

- K : Constante da mola (N/m);
- M : Massa (Kg);
- B : Coeficiente de atrito (N.s/m);
- F : Força (N);
- x : Deslocamento (m).

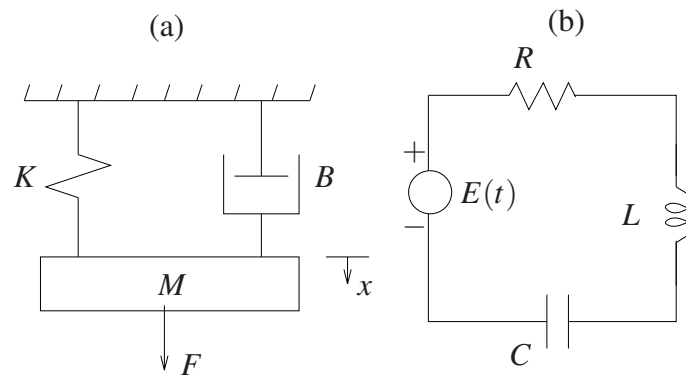


Figura 2: (a) Sistema Massa-Mola-Atrito: (b) Circuito RLC Série

Através das leis da mecânica, obtém-se

$$M \frac{d^2}{dt^2} x(t) + B \frac{d}{dt} x(t) + Kx(t) = F(t) \quad (3)$$

ou,

$$\ddot{x} + \frac{B}{M} \dot{x} + \frac{K}{M} x = \frac{1}{M} F \quad (4)$$

Para o sistema elétrico, seja

R : Resistência (Ω);

L : Indutância (H);

C : Capacitância (F);

$E(t)$: Tensão de entrada (V);

$q(t)$: Carga (C).

A equação de malha do circuito fornece

$$L \frac{d^2}{dt^2} q(t) + R \frac{d}{dt} q(t) + \frac{1}{C} q(t) = E(t) \quad (5)$$

ou, do mesmo modo,

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = \frac{1}{L} E \quad (6)$$

As equações diferenciais (4) e (6) são chamadas de equações diferenciais lineares de 2a. ordem. Analogamente ao Exemplo 1, as funções $F(t)$ e $E(t)$ são chamadas de funções de entrada.

2 Equações Diferenciais Lineares

A seguir, discute-se como obter soluções analíticas para equações diferenciais como as dos Exemplos 1 e 2.

2.1 Equação Diferencial Linear de 1a. Ordem Homogênea

A equação diferencial homogênea mais simples tem a forma

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(0) = x_0 \quad (7)$$

onde $x = x(t)$ é uma função real da variável real t (associada nos exemplos anteriores ao tempo) a ser determinada e λ é uma constante real dada. Supõe-se que a condição inicial ou valor de x no instante $t = 0$, $x(0) = x_0$ é conhecida. A solução única da equação (7) é dada por

$$x(t) = \exp(\lambda t)x_0 \quad (8)$$

O comportamento qualitativo da solução $x(t)$ é mostrado na Fig. 3, em função do sinal da constante real λ . Note que

1. Se $\lambda > 0$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$ é divergente, e diz-se neste caso que o sistema descrito pela equação diferencial é *instável*;
2. Se $\lambda = 0$ então $x(t) = x_0$, $t \geq 0$ e o sistema é *estável*;
3. Se $\lambda < 0$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ e o sistema é *assintoticamente estável*.

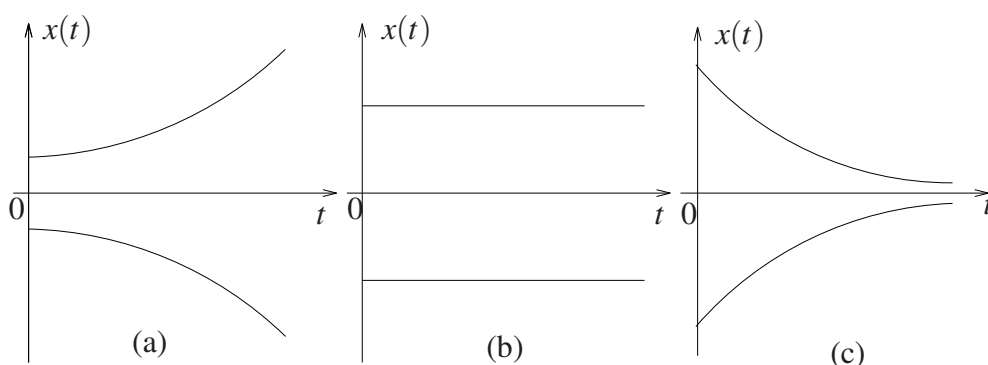


Figura 3: (a) Sistema Instável ($\lambda > 0$); (b) Sistema Estável ($\lambda = 0$); (c) Sistema Assintoticamente Estável ($\lambda < 0$).

2.2 Equação Diferencial Linear de 2a. Ordem Homogênea

Uma equação diferencial linear de 2a. ordem homogênea envolve a derivada de 2a. ordem da variável dependente e pode ser representada genericamente como

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0, \quad x(0) = x_0; \dot{x}(0) = Dx_0 \quad (9)$$

Devido à semelhança desta equação com a equação de 1a. ordem apresentada na seção anterior, supõe-se que a solução é do mesmo tipo, ou seja,

$$x(t) = \exp(\lambda t) \quad (10)$$

Substituindo esta solução na equação (9), obtém-se

$$\dot{x} = \lambda \exp(\lambda t) \quad (11)$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 \exp(\lambda t) \quad (12)$$

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = (\lambda^2 + a\lambda + b) \exp(\lambda t) = 0 \quad (13)$$

Dado que a função $\exp(\lambda t)$ nunca se anula, uma condição necessária para que (10) seja solução de (9) será

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (14)$$

Esta equação algébrica é chamada de *Equação Característica* da equação diferencial (9) e possui em geral duas raízes distintas, λ_1 e λ_2 . Portanto, as funções

$$\exp(\lambda_1 t) \text{ e } \exp(\lambda_2 t) \quad (15)$$

satisfazem a equação (9) a menos das condições iniciais. Por outro lado, se $f_1(t)$ e $f_2(t)$ satisfazem a equação (9), é fácil verificar que o mesmo ocorre com $f(t) = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$, bastando para tanto que se substitua $f(t)$ em (9). Deste modo, uma solução para a equação (9) é

$$x(t) = k_1 \exp(\lambda_1 t) + k_2 \exp(\lambda_2 t) \quad (16)$$

onde λ_1 e λ_2 são as raízes da equação (14). O tipo de solução da equação diferencial dependerá da natureza destas raízes.

2.2.1 Raízes Reais e Distintas

Se λ_1 e λ_2 são valores reais e distintos tem-se então que

$$\dot{x}(t) = k_1 \lambda_1 \exp(\lambda_1 t) + k_2 \lambda_2 \exp(\lambda_2 t) \quad (17)$$

e portanto

$$x(0) = k_1 + k_2 = x_0 \quad (18)$$

$$\dot{x}(0) = k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 = Dx_0 \quad (19)$$

$$k_1 = \frac{-Dx_0 + \lambda_2 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (20)$$

$$k_2 = \frac{Dx_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (21)$$

Este resultado permite concluir que, se $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, a solução dada por (16) é geral, pois pode ser calculada para quaisquer valores de $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Além disso, é possível mostrar que esta solução é única.

2.2.2 Raiz Real Dupla

Neste caso, $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$ e portanto

$$x(t) = k_1 \exp(\lambda_1 t) + k_2 \exp(\lambda_2 t) = (k_1 + k_2) \exp(\lambda t) = k_3 \exp(\lambda t) \quad (22)$$

Esta solução não é geral, pois existe apenas uma incógnita (k_3) e não é possível resolver o sistema

$$x(0) = k_3 = x_0 \quad (23)$$

$$\dot{x}(0) = k_3 \lambda = Dx_0 \quad (24)$$

para quaisquer valores de $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Entretanto, considere a seguinte função

$$x(t) = t \exp(\lambda t) \quad (25)$$

Esta função satisfaz a equação diferencial, pois

$$\dot{x} = t\lambda \exp(\lambda t) + \exp(\lambda t) \quad (26)$$

$$\ddot{x} = \lambda[t\lambda \exp(\lambda t) + \exp(\lambda t)] + \lambda \exp(\lambda t) \quad (27)$$

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = t \exp(\lambda t)(\lambda^2 + a\lambda + b) + \exp(\lambda t)(2\lambda + a) \quad (28)$$

A expressão entre parênteses é nula pois λ é solução da equação característica. A expressão no segundo parênteses também é nula pois $\lambda = -a/2$. Consequentemente (25) satisfaz a equação diferencial, o mesmo ocorrendo com a combinação linear de funções

$$x(t) = k_1 \exp(\lambda t) + k_2 t \exp(\lambda t) \quad (29)$$

Usando-se as condições iniciais, obtém-se os valores de k_1 e k_2 :

$$k_1 = x_0 \quad (30)$$

$$k_2 = Dx_0 - x_0 \lambda \quad (31)$$

A solução representada por (29) é geral para o caso $\lambda_2 = \lambda_1$ uma vez que é possível calcular k_1 e k_2 para quaisquer valores iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$.

2.2.3 Raízes Complexas

A solução da equação diferencial neste caso envolverá a chamada *Fórmula de Euler*, a saber

$$\exp(j\theta) = \cos \theta + j \sin \theta \quad (32)$$

Se λ é uma raiz complexa da equação (14) então $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ) também é raiz da mesma equação. Sejam

$$\lambda_1 = \sigma + j\omega \quad (33)$$

$$\lambda_2 = \sigma - j\omega, \quad \omega \neq 0 \quad (34)$$

as raízes da equação característica. Considere a solução dada por (16), ou seja,

$$x(t) = k_1 \exp(\lambda_1 t) + k_2 \exp(\lambda_2 t) = k_1 \exp[(\sigma + j\omega)t] + k_2 \exp[(\sigma - j\omega)t] \quad (35)$$

Utilizando (32), obtém-se

$$x(t) = \exp(\sigma t)[A \cos \omega t + B \sin \omega t] \quad (36)$$

onde $A = k_1 + k_2$ e $B = j(k_1 - k_2)$. Usando as condições iniciais, obtém-se

$$x(0) = A = x_0 \quad (37)$$

$$\dot{x}(0) = \sigma A + B\omega = Dx_0 \quad (38)$$

ou ainda

$$A = x_0 \quad (39)$$

$$B = \frac{Dx_0 - \sigma x_0}{\omega} \quad (40)$$

Em consequência, se $\omega \neq 0$ é possível obter A e B para quaisquer valores iniciais de $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Assim sendo, (36) é uma solução geral quando as raízes da equação característica são complexas. O comportamento qualitativo da solução $x(t)$ é analisado nas Figs. 4 e 5, a seguir. A resposta do sistema no caso de raízes duplas é qualitativamente similar ao representado na Fig. 4.

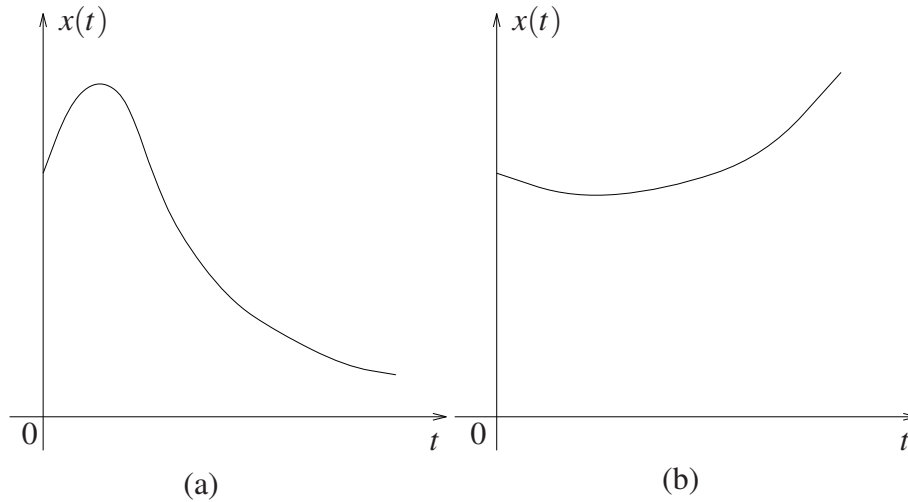


Figura 4: Raízes Reais e Distintas. (a) Raízes negativas; (b) Uma raiz positiva.

3 Equações Lineares Não-Homogêneas

Seja a equação diferencial linear de 2a. ordem não-homogênea dada a seguir

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = u(t), \quad x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = Dx_0 \quad (41)$$

Seja $x_p(t)$ uma solução qualquer desta equação e $x_h(t)$ a solução da equação homogênea (quando $u(t) = 0, \forall t$). Tem-se então que

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (42)$$

é uma solução da equação (41). De fato, substituindo-se (42) em (41), vem

$$(\ddot{x}_h + a\dot{x}_h + bx_h) + \ddot{x}_p + a\dot{x}_p + bx_p = 0 + u(t) \quad (43)$$

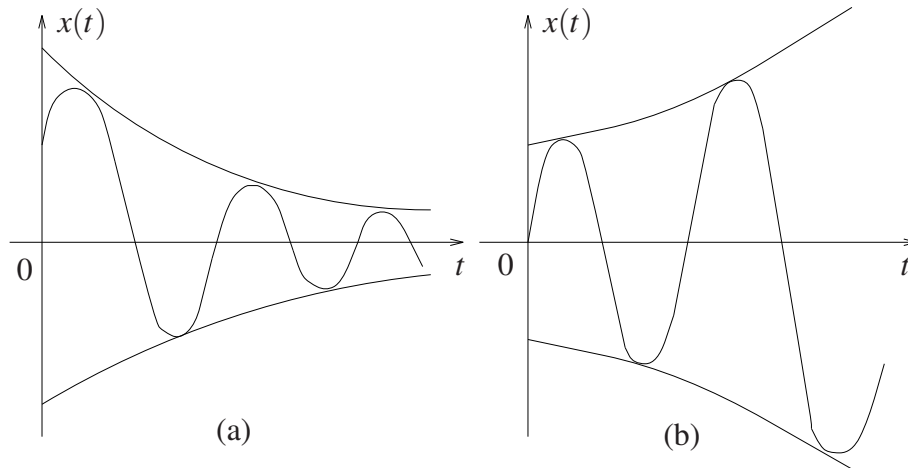


Figura 5: Raízes Complexas. (a) Parte real negativa; (b) Parte real positiva.

Além disso, fazendo

$$x(0) = x_h(0) + x_p(0) \quad (44)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_h(0) + \dot{x}_p(0) \quad (45)$$

é sempre possível encontrar uma solução para (41) quaisquer que sejam as condições iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Conclui-se portanto que (42) é uma solução geral para a equação não-homogênea (41). Estes fatos são verdadeiros para equações diferenciais lineares não-homogêneas, independentemente de suas ordens.

O problema se resume então em obter $x_p(t)$, que é chamada de *solução particular*. Esta solução depende obviamente da função $u(t)$. Nesta experiência, considera-se apenas o caso particular em que $u(t)$ é uma função constante, isto é, $u(t) = E$ (constante).

Suponha que a solução particular é do tipo $x_p(t) = K$, $\forall t$, onde K é uma constante a determinar. Neste caso, é fácil ver que $\ddot{x}_p(t) = \dot{x}_p(t) = 0$ e que a equação

$$\ddot{x}_p + a\dot{x}_p + bx_p = bK = E \quad (46)$$

permite obter $K = E/b$. É comum considerar a função $u(t)$ como sendo a *função degrau*, ou seja,

$$u(t) = \begin{cases} E & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (47)$$

Neste caso, considerando o instante inicial igual a 0, a solução particular obtida não se altera, ou seja,

$$x_p(t) = \frac{E}{b}, \quad t \geq 0 \quad (48)$$

As Figs. 6 e 7, a seguir, ilustram o comportamento qualitativo da solução geral (42), para os três casos analisados anteriormente, supondo-se condições iniciais nulas ($x(0) = \dot{x}(0) = 0$). Como no caso anterior, a resposta do sistema com raízes duplas é qualitativamente similar à representada na Fig. 6.

Considere agora o caso de uma equação diferencial linear não-homogênea de 1a. ordem, na forma

$$\dot{x} - \lambda x = u(t) \quad (49)$$

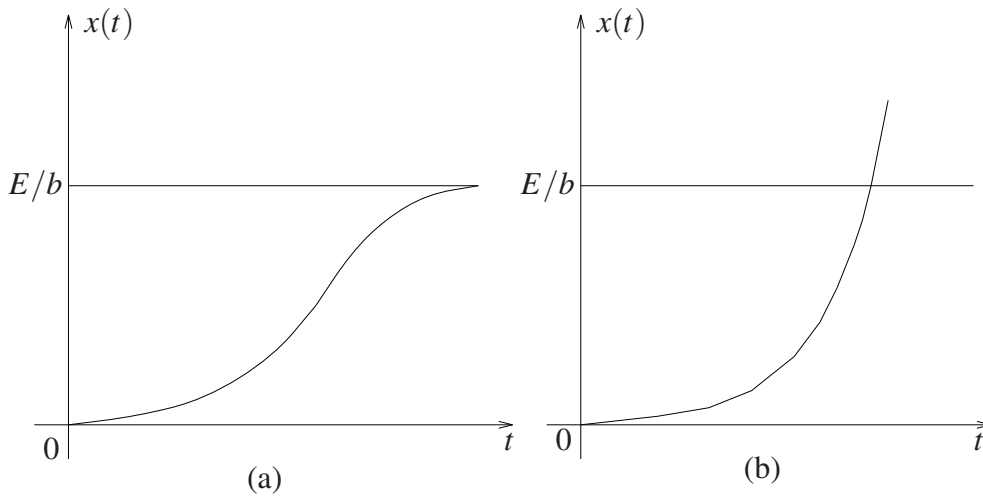


Figura 6: (a) Raízes negativas; (b) Uma raiz positiva.

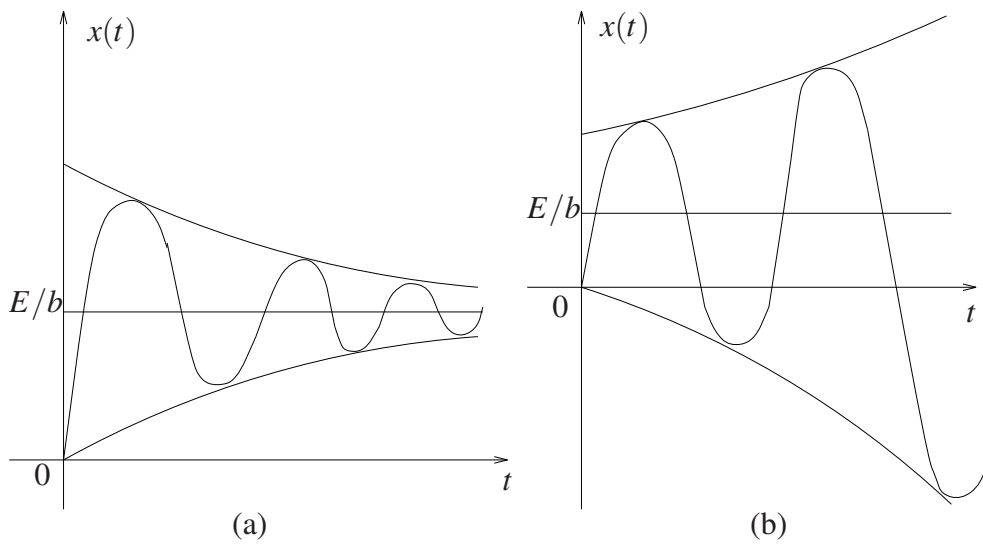


Figura 7: (a) Parte real negativa; (b) Parte real positiva.

Se $u(t) = E$, a solução particular será também do tipo $x_p(t) = K$, conforme pode ser visto através de (49):

$$\dot{x}_p - \lambda x_p = E \quad (50)$$

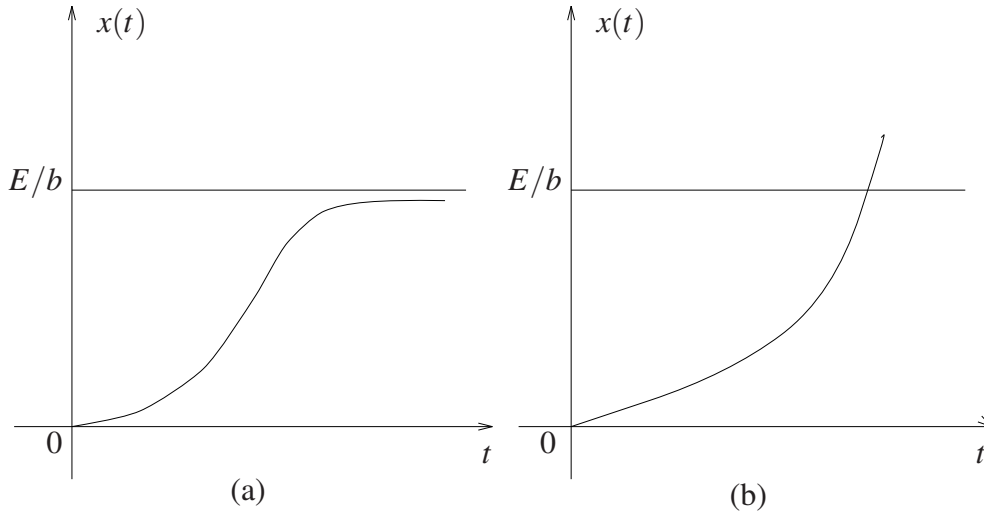
$$-\lambda K = E \quad (51)$$

e assim $K = -E/\lambda$. A solução geral é obtida através da composição de (8) com a solução particular, fornecendo,

$$x(t) = \exp(\lambda t)x_h(0) - \frac{E}{\lambda}, \quad x_h(0) = x(0) + \frac{E}{\lambda} \quad (52)$$

Analogamente ao caso estudado anteriormente, esta solução não se altera para $t \geq 0$ se a entrada for a função degrau. O comportamento qualitativo da solução (52) é ilustrado na Fig. 8, a seguir, para $x(0) = 0$. No caso de sistemas estáveis de 1a. ordem, a grandeza

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} > 0 \quad (53)$$

Figura 8: (a) $\lambda < 0$; (b) $\lambda > 0$.

é chamada de *constante de tempo* do sistema. A constante de tempo corresponde ao instante no qual a variável dependente atinge aproximadamente 64% de seu valor de regime (o valor de regime é $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -E/\lambda$). De fato, para $t = \tau = -1/\lambda$ e $x(0) = 0$, tem-se que

$$x\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = -\frac{E}{\lambda}(1 - \exp(-1)) \approx 0.64\left(-\frac{E}{\lambda}\right) \quad (54)$$

Para $t = 3\tau$, constata-se que a variável dependente atinge cerca de 95% do seu valor de regime.

4 Forma Canônica da Equação de 2a. Ordem

A equação diferencial linear de 2a. ordem é frequentemente escrita na sua *forma canônica*, dada a seguir.

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = u(t) \quad (55)$$

De acordo com os resultados obtidos anteriormente, o comportamento da solução de (55) é definido pelas raízes da equação característica

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (56)$$

com $\omega_n > 0$. As raízes da equação são

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (57)$$

$$\lambda_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (58)$$

É fácil ver que

1. Se $|\xi| > 1$, obtém-se duas raízes reais distintas;
2. Se $|\xi| = 1$, obtém-se uma raiz dupla;
3. Se $|\xi| < 1$, obtém-se raízes complexas conjugadas.

Neste último caso, é possível reescrever as raízes da equação na forma

$$\lambda_1 = \omega_n(-\xi + j\sqrt{1-\xi^2}) \quad (59)$$

$$\lambda_2 = \omega_n(-\xi - j\sqrt{1-\xi^2}) \quad (60)$$

ou ainda,

$$\lambda_1 = \omega_n(-\cos\theta + j\sin\theta) \quad (61)$$

$$\lambda_2 = \omega_n(-\cos\theta - j\sin\theta) \quad (62)$$

onde $\theta = \arccos\xi$. Analisando as raízes no plano complexo (Fig. 9), observa-se que se $\xi = 0$, as raízes serão números complexos puros e a solução da equação homogênea será, de acordo com a equação (36),

$$x_h(t) = A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t \quad (63)$$

onde

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \quad (64)$$

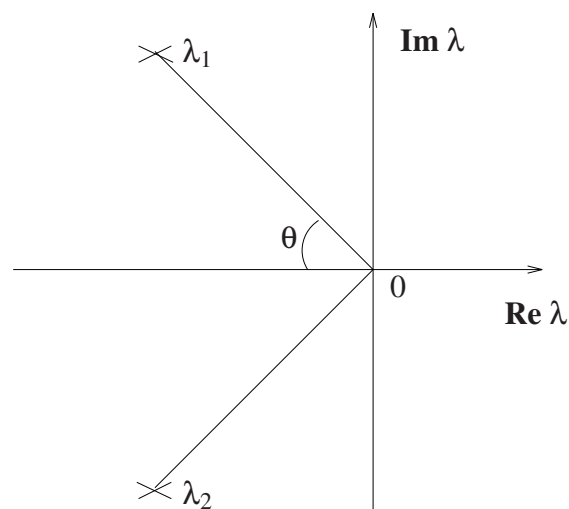


Figura 9: Localização no Plano Complexo. A distância de λ_1 ou λ_2 à origem é igual a ω_n .

Por esta razão, o parâmetro ω_n é chamado de *freqüência natural* da equação (55). Para um dado valor de ω_n , quanto maior for o valor de ξ ($0 < \xi < 1$), maior será o módulo da parte real das raízes e, em consequência, mais *amortecida* será a solução. Devido a esta propriedade, o parâmetro ξ é chamado de *fator ou coeficiente de amortecimento* da equação (55).

Parte II

Sistemas Eletromecânicos

Cinco dispositivos eletromecânicos ECP estão disponíveis para uso nas disciplinas EA-619 Laboratório de Análise Linear, e EA-722 Laboratório de Controle e Servomecanismos. Esses sistemas foram concebidos para facilitar o entendimento dos princípios básicos de controle e da análise de sistemas, consistindo de cinco diferentes plataformas para experimentos

e demonstrações. Cada um deles consiste de um dispositivo eletromecânico e de um sistema de apoio completo — software e hardware, para aquisição de dados, atuação, visualização de dados, etc.

1. O sistema denominado *Emulador Industrial* reproduz situações típicas encontradas no controle de sistemas industriais.
2. O sistema denominado *Sistema Retilíneo* reproduz situações típicas encontradas no controle de sistemas clássicos massa-mola-atrito.
3. O sistema denominado *Sistema Torcional* reproduz situações típicas encontradas no controle de sistemas industriais flexíveis.
4. O sistema denominado *Pêndulo Invertido* reproduz situações típicas encontradas no controle de plantas instáveis.
5. O sistema denominado *Levitador Magnético* reproduz situações típicas encontradas no controle de sistemas multivariáveis.

Na primeira experiência com esses dispositivos, são apresentadas as suas principais características e os recursos do sistema de apoio. Inicia-se o estudo dos modelos matemáticos que serão utilizados.

5 Descrição dos sistemas

5.1 Emulador industrial

A descrição a seguir pode ser acompanhada com o auxílio da Fig. 10 ou da figura 2.2-1 do manual [?].

O sistema consiste de um *motor de atuação* (servo-atuador) que está acoplado através de uma *correia de transmissão* ao *disco de atuação*. Outra correia de transmissão conecta o disco de atuação ao dispositivo *reductor de velocidade* (SR), enquanto que uma terceira correia completa a cadeia de transmissão ao *disco de carga*.

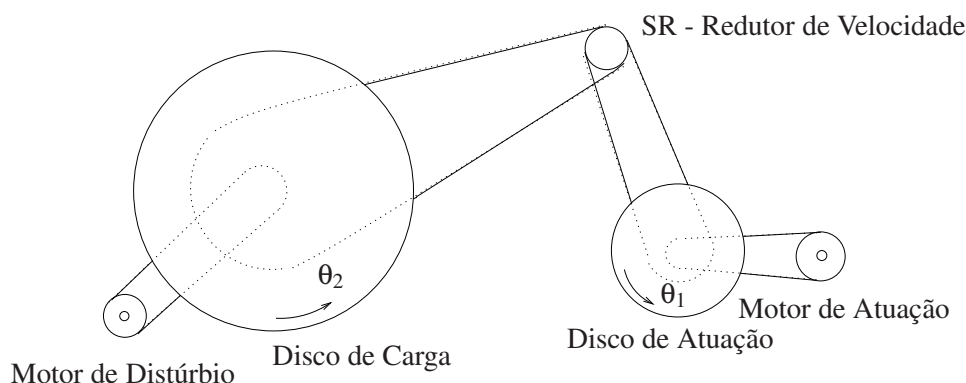


Figura 10: Diagrama esquemático do emulador industrial.

As inércias dos discos de atuação e de carga podem ser modificadas através de *pesos* cujos valores e distâncias aos centros dos discos são convenientemente escolhidos para refletir diferentes modelos e situações de controle.

Reduções de velocidade podem ser realizadas através de *polias* e *correias* dentadas de tamanhos variáveis, ajustáveis ao SR. Pode-se introduzir, de modo a reproduzir situações de interesse, folga na conexão mecânica (*backlash*) através de um mecanismo incorporado ao SR, ou atrito extra. Utilizando correias elásticas para conectar o dispositivo SR e o disco de carga, pode-se introduzir *flexibilidade* no acoplamento entre o movimento dos discos de atuação e de carga.

O disco de atuação move-se rigidamente, passo-a-passo com o motor de atuação, de tal forma que a inércia do motor de atuação pode ser considerada *co-allocada*¹, na inércia do disco de atuação. Contudo, a inércia da carga rotaciona numa velocidade diferente da do disco de atuação devido ao dispositivo redutor de velocidade. Como pode existir flexibilidade e/ou folga na conexão mecânica entre o disco de carga e o motor de atuação, a inércia do disco de carga é considerada não co-allocada à do motor.

Também um *motor de distúrbio* está conectado ao disco de carga através de uma redução de velocidade 4:1 feita por correia e polias, e é usado para emular atrito viscoso e distúrbios no comportamento da planta (por exemplo, nas variáveis posição e velocidade do disco de carga).

Um freio abaixo do disco de carga pode ser usado para introduzir atrito de Coulomb. Assim, atritos, distúrbios, folga em conexão mecânica e flexibilidade podem ser utilizados de forma adequada a emulação de situações práticas, permitindo refletir situações não ideais presentes em quase todos os sistemas eletromecânicos fisicamente realizáveis.

Todos os eixos rotatórios do sistema são construídos através de rolamentos de precisão. *Encoders* incrementais de alta precisão estão diretamente acoplados aos discos de atuação (θ_1) e de carga (θ_2). Os motores de atuação e de distúrbio são alimentados eletricamente por servo-amplificadores e fontes de potência instalados numa caixa separada, contendo a eletrônica de acionamento, veja Fig. 15.

5.2 Sistema retilíneo

A descrição a seguir pode ser acompanhada com o auxílio da Fig. 11 ou da figura 2.2-1 do manual [?].

O sistema consiste de três carros (*mass carriages*) que deslizam com baixo atrito e são conectados entre si através de molas bi-direcionais. As massas estão apoiadas em rolamentos anti-fricção, e podem excursionar por até ± 3 cm. O atuador linear é composto por uma cremalheira (*carriage and pinion*) apoiada sobre rolamentos anti-fricção, acoplada ao eixo de um servo-motor. *Encoders* medem as posições dos carros também através de cremalheiras.

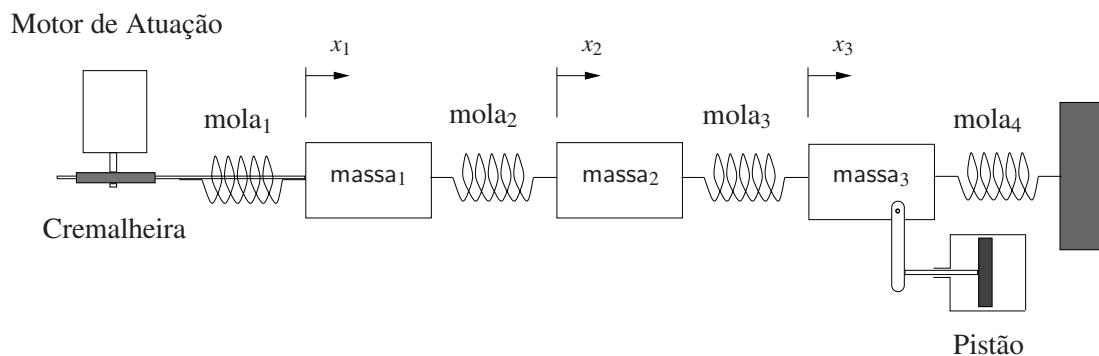


Figura 11: Diagrama Esquemático do sistema retilíneo.

¹do inglês *collocated*

Molas de diferente rigidez (*stiffness*) podem ser conectadas entre as massas ou entre as massas e a base do conjunto. Um pistão (*dashpot*) com amortecimento ajustável pode ser acoplado a qualquer uma das massas. Escalas para medidas de posição estão disponíveis como auxílio para certos experimentos. As massas dos carros podem ser alteradas, bem como a configuração e o número de massas e molas, posicionamento do pistão e de extremidades fixas. Pode-se compor dessa forma, diferentes situações de controle, vide seção 2.2 do manual [?].

O carro correspondente à massa₁ move-se rigidamente através de uma haste, em conjunto com o motor de atuação, de tal forma que a inércia do servo-motor pode ser considerada *co-allocada*, à inércia da massa₁. O dispositivo de transmissão (cremalheira) transforma o movimento de rotação do motor em translação da massa₁. Devido à flexibilidade na conexão por molas, as inércias da massa₂ e massa₃ são consideradas não co-allocadas à do motor.

Encoders incrementais de alta precisão diretamente acoplados aos carros fornecem leitura das posições absolutas x_1, x_2 e x_3 . O motor de atuação é alimentado eletricamente por um servo-amplificador e fonte de potência instalados numa caixa separada, contendo a eletrônica de acionamento, veja Fig. 15.

5.3 Sistema torcional

A descrição a seguir pode ser acompanhada com o auxílio da Fig. 12 ou da figura 2.2-1 do manual [?].

O sistema consiste de três discos que encontram-se conectados através de um eixo torcional flexível suspenso verticalmente por rolamentos anti-fricção. O eixo é movimentado por um servo- motor, ao qual se encontra conectado através de uma correia rígida e engrenagem com redução de velocidade 3:1. Um *encoder* localizado na base do eixo mede o deslocamento angular θ_1 do primeiro disco com inércia J_1 .

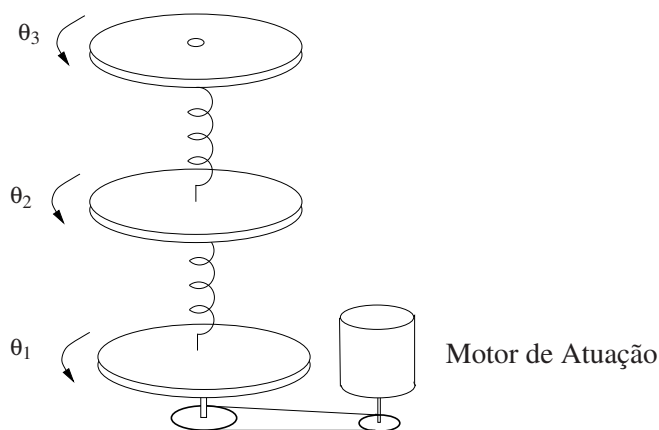


Figura 12: Diagrama Esquemático do sistema torcional.

O segundo e terceiro discos estão conectados aos seus respectivos encoders por correias e engrenagens de razões 1:1 e possuem inércias J_2 e J_3 , respectivamente. Os discos são removíveis para dar origem a diferentes configurações de plantas. As inércias dos discos podem ser alteradas através de *pesos* dispostos sobre os discos à distâncias ajustáveis do centro do disco. A configuração de discos, barra de torção, inércia e extremidades fixas podem ser modificadas para refletir diferentes situações de controle, vide seção 2.2 do manual [?].

O disco₁ move-se em conjunto com o motor de atuação, de forma que a inércia do servo-motor pode ser representada *co-allocada*, à inércia do disco₁. Um dispositivo de transmissão

por correia conecta e transfere o movimento de rotação do servo-motor para o disco₁. Devido à flexibilidade na conexão entre os discos, as inércias do disco₂ e disco₃ são consideradas não co-allocadas à do motor.

Encoders incrementais de alta precisão diretamente acoplados aos discos fornecem leitura dos deslocamentos angulares θ_1 , θ_2 e θ_3 . O motor de atuação é alimentado eletricamente por um servo-amplificador e fonte de potência instalados numa caixa separada, contendo a eletrônica de acionamento, veja Fig. 15.

5.4 Pêndulo invertido

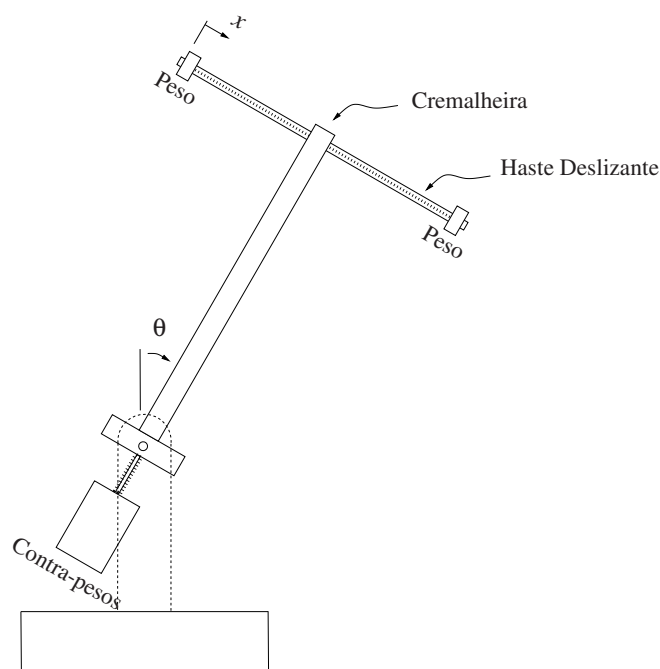


Figura 13: Diagrama Esquemático do pêndulo invertido.

A descrição a seguir pode ser acompanhada com o auxílio da Fig 13 ou da figura 2.2-1 do manual [?].

O sistema consiste de uma haste pendular (*pendulum rod*) que suporta a haste deslizante (*sliding balance rod*) responsável pelo balanço do sistema. A haste de balanço é movimentada através de um sistema de correia e polia, que por sua vez é movimentada através de um eixo de transmissão conectado a um servo-motor DC localizado na base da haste pendular (omitido na Fig. 13).

Um *encoder* acoplado ao motor mede o deslocamento da haste deslizante. Outro encoder localizado na base de pivoteamento do sistema é usado para medir a posição angular do pêndulo. Ajustando-se convenientemente a posição linear x da haste deslizante na presença da gravidade, pode-se controlar a posição angular θ do pêndulo em relação à vertical. Os motores de atuação são alimentados eletricamente por servo-amplificadores e fontes de potência instalados numa caixa separada, contendo a eletrônica de acionamento, veja Fig. 15.

Os contra-pesos localizados na extremidade inferior da haste pendular podem ser ajustados de forma a alterar o centro de gravidade do conjunto e, conseqüentemente, a dinâmica do sistema.

5.5 Levitador magnético

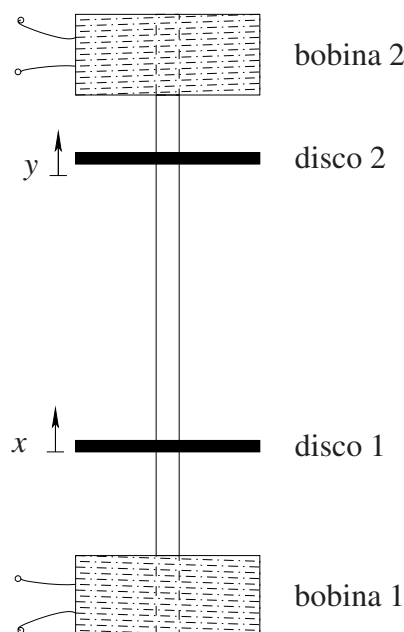


Figura 14: Diagrama do levitador magnético

A descrição a seguir pode ser acompanhada com o auxílio da Fig 14 ou da figura 2.2-1 do manual [?].

O sistema é composto por duas bobinas, uma inferior e outra superior que geram um campo magnético pela passagem de uma corrente. Essas bobinas interagem através do campo com (um ou dois) discos magnéticos que se deslocam em uma barra de vidro que serve como guia. Variando-se a magnitude da corrente na bobina inferior, pode-se controlar a posição do magneto inferior fazendo-o levitar através de uma força magnética repulsiva. Similarmente, o magneto superior é posicionado através de uma força magnética de atração, adotando-se um valor adequado de corrente na bobina superior. Com a proximidade dos discos surge também interação magnética (força de repulsão) entre os dois magnetos.

Dois sensores ópticos baseados em feixes de luz laser são utilizados para medir a posição dos magnetos.

5.6 Aquisição de dados, atuação e interfaces

O diagrama esquemático de um sistema ECP completo é mostrado na Fig. 15.

Nos sistemas Emulador Industrial, Retilíneo, Torcional e Pêndulo Invertido, os *encoders* fornecem realimentação incremental das posições (e suas derivadas) angulares, e essas informações são roteadas para a placa DSP², que então converte os pulsos em valores numéricos. Para o sistema Levitador Magnético a informação sobre a posição é fornecida pelo medidor óptico. A

²DSP acrônimo para *Digital Signal Processor*.

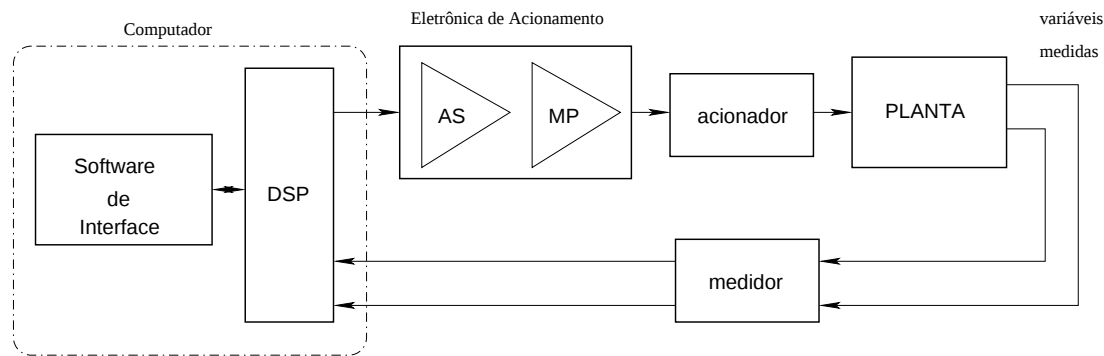


Figura 15: AS - amplificador servo; MP - módulo de potência; DSP - placa de processamento e de conversão de sinais.

placa DSP é capaz de interpretar comandos de trajetórias e realizar verificações em variáveis com o objetivo de garantir a segurança na operação do equipamento. Nos sistemas Emulador Industrial, Retilíneo, Torcional e Pêndulo Invertido o acionamento das plantas é feito por um motor de corrente contínua sem escovas que gera o torque necessário para o respectivo processo. No Levitador Magnético o acionamento é feito por um sistema eletrônico de potência que gera o sinal de corrente adequado para a bobina.

O terceiro elemento que compõe e finaliza todos os sistemas ECP é o *programa executivo* que roda no PC e dispõe de uma interface gráfica a base de menus, que permite operar o sistema com facilidade. Ele dá suporte à definição de trajetórias, aquisição de dados, visualização de curvas, especificação de controladores, execução de comandos do sistema, etc.

5.7 Mudanças de configuração

Para uma descrição das diferentes configurações do sistema e instruções detalhadas de como realizar alterações de configurações, veja a **seção 2.2.** dos manuais correspondentes.

6 Segurança

As instruções sobre segurança contidas na **seção 2.3** dos manuais dos equipamentos deverão ser rigorosamente observadas por todos os usuários do sistema. Particular atenção deve ser dada para os seguintes pontos:

- !! Em situação de emergência pressione o botão vermelho (OFF) no painel frontal da Caixa de Controle.
- !! Fique a distância e não toque o mecanismo enquanto ele estiver em movimento, ou o controle estiver ativado.
- !! Desligue a Caixa de Controle antes de realizar qualquer modificação no sistema.
- !! Verifique se as massas adicionais, discos de inércia, correias estão presas com firmeza, antes de acionar a Caixa de Controle. Repor a cobertura de acrílico no Emulador Industrial após alterações na configuração.

Quanto aos computadores acoplados aos sistemas ECP, pede-se aos alunos que se utilizem dos diretórios em disco alocados para a disciplina `c:\user\ea617\turma`, e para que as configurações não sejam prejudicadas, nunca instalem software.

,

Roteiro

Nota: Os símbolos g, t, d e s indicam a necessidade de produção de um gráfico, desenvolvimento teórico, diagrama simulink e script matlab, respectivamente.

1. Implemente o diagrama de simulação da seguinte equação diferencial

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \omega_n^2u(t)$$

para $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ e $u(t) = \text{degrau unitário}$ d. Também deverá ser fornecido um script que muda os valores de ξ e ω_n executa a simulação por meio do comando `sim` s.

Responda então aos seguintes itens.

- (a) Para $\omega_n = 0.5 : 0.5 : 2$, compare a sobre-elevação máxima (M_p) e o tempo em que esta ocorre (T_p), obtidos graficamente no caso $\xi = 0.5$, com os valores teóricos de M_p e T_p , de acordo com as expressões (t – em forma de tabela):

$$M_p = \frac{x_{\max}}{x_{\text{regime}}} = \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) + 1, \quad T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

Também apresentar um único gráfico com todas as simulações g.

- (b) Para $\xi = 0.5$ e $\omega_n = 0.5 : 0.5 : 2$ compare a frequência de oscilação obtida graficamente com as frequências esperadas teoricamente (t – em forma de tabela).
 - (c) Faça um script que a partir da resposta $y(t)$ (obtida com o bloco `out`), determine automaticamente M_p , T_p , ξ , ω_n e os pólos do sistema (raízes de $s^2 + 2\xi\omega_ns + \omega_n^2 = 0$) s. Utilize a função `roots`.
2. Construa diagramas de simulação em simulink para obter $y(t)$ das seguintes equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) + y(t) &= u(t), & \ddot{y}(t) + 11\dot{y}(t) + 10y(t) &= 10u(t), \\ y^{III}(t) + 31\ddot{y}(t) + 230\dot{y}(t) + 200y(t) &= 200u(t), \end{aligned}$$

com $u(t)$ sendo o degrau unitário e com todas as condições iniciais nulas. De preferência implemente as três equações diferenciais num mesmo diagrama d. Plote os três sinais $y(t)$ encontrados numa mesma figura g e interprete t.

3. Considere o sistema massa/mola/atrito-viscoso da Figura 16 que pode ser configurado no Sistema Retilíneo ECP. As equações diferenciais que regem o comportamento do sistema são:

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F(t) \quad (65)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_3x_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (66)$$

A partir do conjunto de equações (65)-(66), implemente o Diagrama de Simulação Analógica do sistema usando o SIMULINK d. Considere $F(t) = \delta(t)$, condições iniciais nulas e utilize os dados numéricos (unidades MKS):

$$\begin{aligned} m_1 &= 0,7 \text{ kg}; \quad m_2 = 0,5 \text{ kg}; \quad k_1 = k_3 = 380 \text{ N/m}; \quad k_2 = 200 \text{ N/m}; \quad c_1 = c_2 = 1,5 \text{ N-s/m} \\ J_1 &= 0,003 \text{ kg-m}^2; \quad J_2 = 0,002 \text{ kg-m}^2; \quad K_1 = K_2 = 1,5 \text{ N-rad}; \quad b_1 = 0,01 \text{ N-m/rad} \end{aligned}$$

Valendo-se do comando `subplot`, produza os seguintes gráficos:

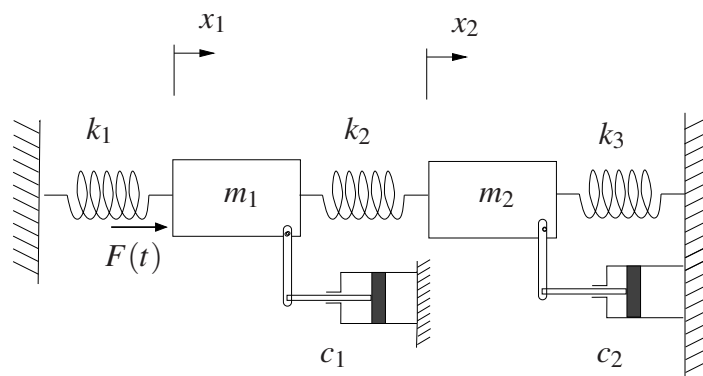


Figura 16: Sistema Retílineo com 2 massas 3 molas e 2 amortecedores.

- (a) Na mesma figura, plote x_1 versus tempo e $\dot{x}_1$ versus tempo
 - (b) Na mesma figura, plote x_2 versus tempo e $\dot{x}_2$ versus tempo
 - (c) Plote x_1 versus x_2 (plano de fase)
4. **Demonstração Auto-Guiada:** Um primeiro contato com as funções do *programa executivo* do sistema pode ser realizado seguindo-se os passos da **seção 3.2** do manual do equipamento correspondente, seguindo no máximo até o **Step 7**. Observe que os parâmetros iniciais presentes no arquivo `default.cfg` referem-se a uma determinada configuração da planta mecânica, especificada no manual, devendo-se verificar a montagem antes de se acionar o sistema.
- Alguns valores de parâmetros do arquivo `default` podem diferir dos valores indicados no manual. Adote sempre os valores do arquivo `default`.
- A demonstração auto-guiada deve ser realizada no tempo disponível da aula até que as diferentes funções e *menus* do software estejam sedimentadas.
- As informações contidas nesta apostila devem ser complementadas por uma leitura atenta dos quatro primeiros capítulos do manual do equipamento, que deverá ser sempre consultado para maiores detalhes sobre as características do sistema.

Apresente pelo menos um gráfico obtido (utilizar a rotina `plotRawData.m`) .